1. PRODUCTO ESCALAR. ESPACIO EUCLÍDEO

Muchos de los fenómenos que se investigan en la geometría utilizan nociones como las de longitud de un vector y ángulo entre vectores. Para introducir estos dos conceptos en los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales se define el producto escalar. Un $\mathbb{R}$-espacio vectorial al que se asigna un producto escalar se denomina *espacio vectorial euclídeo*. En este capítulo trabajaremos, principalmente, con $\mathbb{R}$-espacios vectoriales euclídeos de dimensión finita.

1.1. PRODUCTO ESCALAR. LONGITUDES Y ÁNGULOS

Definición 1. *(Producto escalar. Espacio vectorial euclídeo.)*

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Un producto escalar *asociado a V es una aplicación $\langle\, ,\, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que verifica las propiedades siguientes:*

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ *para todo* $u, v \in V$.
2. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ *para todo* $u, v, w \in V$.
3. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ *para todo* $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\langle u, u\rangle > 0$ *para todo* $u \neq \bar{0}$.

Diremos entonces que el par $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ es un espacio vectorial euclídeo.

Si la aplicación $\langle\, ,\, \rangle$ cumple las propiedades 1, 2 y 3 decimos que es una forma bilineal simétrica. Si, además, cumple la propiedad 4, se dice que es definida positiva y se habla de producto escalar asociado a V.

Proposición 1. *Si A es una matriz $n \times n$ definida positiva (simétrica y con todos los autovalores reales y positivos), entonces*

$$\langle X, Y\rangle = X^t A Y, \ \text{con } X, Y \in \mathbb{R}^n$$

define un producto escalar en $\mathbb{R}^n$. De hecho, todos los productos escalares definidos en espacios vectoriales de dimensión finita tendrán una expresión matricial de este tipo.

Para determinar si la matriz A es definida positiva, existen varios criterios que no requieren del cálculo del signo de los autovalores. Enunciamos uno en la siguiente proposición.

Proposición 2. *(Criterio de Sylvester)*

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica y sea $\Delta_i = Det(A_i)$, donde

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

Entonces A es definida positiva si y sólo si $\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Propiedades.

a) $\langle v, \bar{0} \rangle = 0$ para todo $v \in V$.
b) $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$ para todo $u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
c) $\langle v, v \rangle = 0$ si y sólo si $v = \bar{0}$.

Definición 2. *Un ejemplo de espacio vectorial euclídeo, y que será el más utilizado por nosotros, es el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$, al que asociamos el* producto escalar usual *que se define del siguiente modo:*

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Definición 3. *(Norma o módulo. Distancia)*

La longitud, norma o módulo *de un vector $v \in V$ se define como*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Si $\|v\| = 1$, se dice que v es unitario.

La distancia *entre dos vectores $u, v \in V$ se define como*

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

Propiedades.

1. $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = \bar{0}$.
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $v \in V$.
3. Para todo $u, v \in V$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Esta propiedad se conoce como *desigualdad triangular* o de Minkowski.
4. Dado $v \neq \bar{0}$, $\frac{v}{\|v\|}$ es un vector unitario.
5. Para todo $u, v \in V$, $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$. Esta propiedad se conoce como *desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

Definición 4. *(Ángulo entre dos vectores. Ortogonalidad)*

i) Para todo par de vectores no nulos $u, v \in V$, el ángulo *entre u y v se define como el único número $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$.*

ii) Dados $u, v \in V$ no nulos, diremos que son ortogonales *o* perpendiculares *si $\langle u, v \rangle = 0$. Obsérvese que u, v son ortogonales si y sólo si $\cos\theta = 0$, siendo θ el ángulo entre u y v, lo que es equivalente a decir que $\theta = \pi/2$.*

iii) Una base B de vectores de V es ortogonal *si sus vectores son ortogonales entre sí. Si los vectores de B son además unitarios, entonces se dice que la base es* ortonormal.

Propiedades.

1. Si $\{u_1, \ldots, u_k\}$ son vectores no nulos de V, ortogonales entre sí, entonces son linealmente independientes.
2. Si $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortogonal de V, entonces $B' = \{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \ldots, \frac{u_n}{\|u_n\|}\}$ es una base ortonormal de V.

Proposición 3. *Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortogonal del espacio vectorial euclídeo V. Entonces, dado $x \in V$,*

$$x = \frac{\langle x, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 + \cdots + \frac{\langle x, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} e_n$$

esto es, $x_B = (x_1, \ldots, x_n)$ con $x_i = \frac{\langle x, e_i \rangle}{\|e_i\|^2}$. A las coordenadas x_i se les llama coeficientes de Fourier *de x con respecto a la base ortogonal B.*

1.2. MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT. PROYECCIONES

Teorema 1. *(Gram-Schmidt) Dada una base $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de un espacio vectorial euclídeo V, existe una base ortogonal $B' = \{e_1, \ldots, e_n\}$ tal que $L(u_1, \ldots, u_r) = L(e_1, \ldots, e_r)$ para todo $r = 1, \ldots, n$. Los vectores de la base B' serán:*

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 \\ e_2 &= u_2 - \tfrac{\langle u_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 \\ &\vdots \\ e_n &= u_n - \tfrac{\langle u_n, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \cdots - \tfrac{\langle u_n, e_{n-1} \rangle}{\|e_{n-1}\|^2} e_{n-1} \end{aligned}$$

Corolario 1. *Si $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos de V, entonces existe una extensión a una base ortogonal.*

Definición 5. *(Subespacios ortogonales. Complemento ortogonal)*

i) *Un vector no nulo $v \in V$ se dice que es* ortogonal *a un subespacio vectorial W de V, denotado por $v \perp W$, si $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in W$. Esto equivale a probar que v es ortogonal a los vectores de una base de W.*

ii) *Dos subespacios vectoriales W_1, W_2 de V se dicen* ortogonales*, algo que denotaremos por $W_1 \perp W_2$, si para todo $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ se tiene que $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$. Esto equivale a probar que los vectores de una base de W_1 son ortogonales a los vectores de una base de W_2.*

iii) *Si W es un subespacio vectorial de V de dimensión $k < n$, el conjunto*

$$W^{\perp} = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \text{ para todo } w \in W\}$$

es un subespacio vectorial de V de dimensión $n - k$ y se denomina complemento ortogonal *de W. De hecho, $V = W \oplus W^{\perp}$.*

Definición 6. *(Proyección ortogonal)*

Sea W un subespacio vectorial de V. Como $V = W \oplus W^{\perp}$, resulta que todo $v \in V$ se puede escribir de modo único como $v = w + u$ con $w \in W$ y $u \in W^{\perp}$. El vector w recibe el nombre de proyección ortogonal *de v sobre W y se denota por $w = P_W(v)$, mientras que u es la proyección ortogonal de v sobre $W^{\perp}$ y se escribe $u = P_{W^{\perp}}(v)$.*

El siguiente resultado proporciona un método rápido para calcular proyecciones ortogonales sobre un subespacio vectorial.

Proposición 4. *Sea W un subespacio vectorial de V y sea $v \in V$. Si $B_W = \{w_1, \dots, w_r\}$ es una base ortogonal de W, entonces, la proyección ortogonal de v sobre W es*

$$P_W(v) = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \cdots + \frac{\langle v, w_r \rangle}{\|w_r\|^2} w_r$$

Teorema 2. *(Teorema de aproximación)*

Sea W un subespacio vectorial de dimensión finita del espacio euclídeo V. Si $v \in V$, entonces $P_W(v)$ es el vector de W más próximo a v. Esto significa que

$$d(v, P_W(v)) < d(v, w) \text{ para todo } w \in W,\ w \neq P_W(v)$$

1.3. APLICACIÓN: DESARROLLOS DE FOURIER

Denotamos por $C[-\pi, \pi]$ al $\mathbb{R}$-espacio vectorial de funciones continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$, dotado del producto escalar siguiente:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$$

El conjunto de vectores de $C[-\pi, \pi]$,

$$\{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen}(2x), \cos(2x), \dots\},$$

es un conjunto ortogonal, esto es,

$$\langle \operatorname{sen}(mx), \operatorname{sen}(nx) \rangle = 0 \text{ si } m \neq n$$

$$\langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = 0 \text{ si } m \neq n$$

$$\langle \operatorname{sen}(mx), \cos(nx) \rangle = 0 \text{ para todo } m, n \geq 0$$

Téngase en cuenta que $1 = \cos(0x)$ está incluida en estas expresiones.

Por otro lado,

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dx = 2\pi$$

$$\|\operatorname{sen}(kx)\|^2 = \langle \operatorname{sen}(kx), \operatorname{sen}(kx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(kx) \, dx = \pi \quad \forall \, k = 1, 2, \ldots$$

$$\|\cos(kx)\|^2 = \langle \cos(kx), \cos(kx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) \, dx = \pi \quad \forall \, k = 1, 2, \ldots$$

Las comprobaciones de estas afirmaciones se dejan al lector.

Considérese el subespacio vectorial de $V = C[-\pi, \pi]$,

$$W_n = L\{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen}(2x), \cos(2x), \ldots, \operatorname{sen}(nx), \cos(nx)\}$$

Dada una función $f \in V$, se definen los coeficientes de Fourier de f como:

$$a_0 = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\|1\|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$
$$a_k = \frac{\langle f, \cos(kx) \rangle}{\|\cos(kx)\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \quad k = 1, 2, \ldots$$
$$b_k = \frac{\langle f, \operatorname{sen}(kx) \rangle}{\|\operatorname{sen}(kx)\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) \, dx \quad k = 1, 2, \ldots$$

Observación. Si la función f es par ($f(-x) = f(x)$ para todo x) o impar ($f(-x) = -f(x)$ para todo x), el cálculo de los coeficientes de Fourier se simplifica notablemente. Así:

a) Si f es par, entonces $f(x) \operatorname{sen}(kx)$ es impar, de modo que $b_k = 0$.

b) Si f es impar, entonces $f(x) \cos(kx)$ es impar, de modo que $a_k = 0$.

Debido al teorema de aproximación, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 3. *Sea $f \in C[-\pi, \pi]$ y sean $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ los coeficientes de Fourier de f. Entonces,*

$$f_n = P_{W_n}(f) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos(2x) + b_2 \operatorname{sen}(2x) + \cdots$$

$$\cdots + a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$$

es una función perteneciente a

$$W_n = L\{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen}(2x), \cos(2x), \ldots, \operatorname{sen}(nx), \cos(nx)\}.$$

Podemos afirmar que f_n es la función de W_n más próxima a f, ya que

$$d(f, f_n) < d(f, g) \text{ para toda } g \in W_n, \; g \neq f_n$$

La función $f_n = P_{W_n}(f)$ es la *aproximación de Fourier de orden* n a la función f.

Otros resultados en esta línea son los que siguen:

Teorema 4. *Sea* $f \in C[-\pi, \pi]$. *Dado que*

$$W_1 \subseteq W_2 \subseteq W_3 \subseteq \cdots \subseteq W_n \subseteq \cdots$$

resulta

$$\|f - f_1\| \geq \|f - f_2\| \geq \|f - f_3\| \geq \cdots \geq \|f - f_n\| \geq \cdots$$

De hecho, $\|f - f_n\| \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

Teorema 5. *Dada* $f \in C[-\pi, \pi]$, *se tiene que* $f_n(x) \to f(x)$ *cuando* $n \to \infty$ *para todo* $x \in (-\pi, \pi)$.