1. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1.1. SISTEMAS LINEALES DE PRIMER ORDEN

Un sistema de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} & = & a_{11}(t)x_1 + \cdots a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ & \vdots & \\ \frac{dx_n}{dt} & = & a_{n1}(t)x_1 + \cdots a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

se denomina *sistema lineal de primer orden*. Las funciones $a_{ij}(t), f_i(t)$ se supondrán continuas en un intervalo dado $I = (a, b)$. Si $f_i(t) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, se dice que el sistema es homogéneo.

La expresión del sistema anterior se suele hacer en forma matricial

$$(1) \qquad X' = AX + F$$

siendo

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad A = A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$F = F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Si el sistema es homogéneo, se escribe $X' = AX$.

Definición 1. *Diremos que el vector* $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ *es* solución *de (1) en un intervalo I si sus elementos son funciones diferenciables que satisfacen (1) en dicho intervalo.*

Definición 2. *Problema del valor inicial.*

Dado $t_0 \in I$ y dado $X_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$ *un vector cuyas entradas son constantes dadas, el problema de resolver*

$$X' = AX + F$$

sujeto a la condición $X(t_0) = X_0$ se denomina problema de valor inicial *en el intervalo I.*

Teorema 1. *Dadas $A(t)$ y $F(t)$ continuas en el intervalo $I = (a, b)$, el problema de valor inicial*

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} X' & = & AX + F \\ X(t_0) & = & X_0 \end{array} \right.$$

tiene una solución única definida en todo el intervalo I.

Teorema 2. *Principio de superposición.*

Dados $X_1, X_2, \ldots, X_m$ un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo $X' = AX$ en un intervalo I, la combinación lineal

$$X = c_1 X_1 + \cdots + c_m X_m$$

es también solución de $X' = AX$ en el intervalo I.

Definición 3. *Dependencia e independencia lineal de soluciones.*

Dados $X_1, \ldots, X_m$ un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo $X' = AX$ en un intervalo I, se dice que el conjunto es linealmente dependiente *en I si existen constantes $c_1, \ldots, c_m$, no todas cero, tales que*

$$c_1 X_1 + \cdots + c_m X_m = 0$$

para todo $t \in I$. Si el conjunto de vectores no es linealmente dependiente, se dice que es linealmente independiente.

Teorema 3. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ n vectores solución del sistema homogéneo de n ecuaciones y de primer orden*

$$X' = AX$$

en un intervalo I. El conjunto de vectores es linealmente independiente en I si y sólo si el wronskiano

$$W(X_1, \ldots, X_n) = |X_1 \ldots X_n| \neq 0$$

Se puede probar que, si $X_1, \ldots, X_n$ son soluciones de $X' = AX$, entonces $W(X_1, \ldots, X_n) \neq 0$ para todo $t \in I$ o bien $W(X_1, \ldots, X_n) = 0$ para todo $t \in I$. De modo que, si existe un t_0 tal que $W \neq 0$ en t_0, entonces $W \neq 0$ para todo $t \in I$, con lo que las soluciones son linealmente independientes en I.

Definición 4. *Conjunto fundamental de soluciones. Matriz fundamental.*

Sea $X' = AX$ un sistema homogéneo de n ecuaciones y de primer orden. Un conjunto $X_1, \ldots, X_n$ de soluciones linealmente independientes del sistema en un intervalo I es un conjunto fundamental de soluciones . *A la matriz $\Phi(t) = (X_1 \ldots X_n)$ que tiene a estos vectores solución por columnas, se le llama* matriz fundamental *del sistema $X' = AX$. Obsérvese que $\Phi(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.*

Teorema 4. *Solución general de un sistema homogéneo.*

Dado un sistema homogéneo $X' = AX$ en un intervalo I, existe siempre un conjunto fundamental de soluciones $X_1, \ldots, X_n$ en I, esto es, siempre se puede encontrar una matriz fundamental $\Phi(t)$.

La solución general del sistema homogéneo en I será

$$X = c_1 X_1 + \cdots + c_n X_n$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias. Dicho de modo eqivalente:

$$X = \Phi(t)C$$

donde $\Phi(t)$ es una matriz fundamental y $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ es un vector formado por constantes.

Si buscamos la solución del problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X' & = & AX \\ X(t_0) & = & X_0 \end{array} \right.$$

obtenemos $X = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}X_0$

Teorema 5. *Solución general de un sistema no homogéneo.*

Dado el sistema no homogéneo $X' = AX + F$ y dada una solución particular X_p del mismo en el intervalo I, la solución general será

$$X = X_h + X_p$$

siendo X_h la solución general del sistema homogéneo asociado $X' = AX$.

Escrito de modo equivalente,

$$X = \Phi(t)C + X_p$$

Sistemas no homogéneos. Método de variación de las constantes.

Por lo visto arriba, si somos capaces de resolver el sistema homogéneo $X' = AX$, para obtener la solución general de $X' = AX + F$ basta con conocer una solución particular del mismo. Pero, ¿cómo encontrarla? Se aplica el método de variación de las constantes, esto es, se conjetura la existencia de una solución particular del sistema no homogéneo, $X_p(t) = \Phi(t)C(t)$, donde las constantes del vector C pasan a ser funciones

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}.$$

Entonces $X_p' = \Phi(t)C'(t) + \Phi'(t)C(t)$. Al sustituir en $X' = AX + F$ se tiene

$$\Phi(t)C'(t) + \Phi'(t)C(t) = A\Phi(t)C(t) + F$$

Como la solución general del sistema homogéneo es $X = \Phi(t)C$, entonces $X' = \Phi'(t)C = AX = A\Phi(t)C$, con lo que $\Phi'(t) = A\Phi(t)$. Se tiene, al sustituir en la ecuación de arriba,

$$\Phi(t)C'(t) + A\Phi(t)C(t) = A\Phi(t)C(t) + F$$

de manera que $\Phi(t)C'(t) = F(t)$, lo cual implica que $C'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t)$ y, por tanto, $C(t) = \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$. Como $X_p = \Phi(t)C(t)$, resulta

$$X_p = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$$

La solución general del sistema $X' = AX + F$ es entonces

$$X = X_h + X_p = \Phi(t)C + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$$

1.2. SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS

Describimos a continuación el modo de resolver un sistema homogéneo de primer orden con coeficientes constantes, $X' = AX$. Se calculan la forma canónica de Jordan J de A y la matriz de paso P tales que $P^{-1}AP = J$. Se tiene $A = PJP^{-1}$. El siguiente paso es hacer el cambio de variable $X = PY$ con $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ y sustituir en la ecuación. Se tiene $PY' = APY$, esto es, $Y' = P^{-1}APY$ con lo que la resolución del sistema $X' = AX$ queda reducida a la resolución del nuevo y más simple sistema

$$Y' = JY$$

Una vez resuelto éste último, se deshace el cambio y se tiene la solución del sistema homogéneo original. Desarrollaremos todo este proceso para el caso de los sistemas homogéneos planos (dos ecuaciones). Para sistemas con más ecuaciones el procedimiento es análogo.

1.2.1. Sistemas lineales homogéneos planos

Sea $X' = AX$ un sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes y plano.

Caso 1. Si la matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ es diagonalizable con autovalores reales, la forma canónica de jordan de A es

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Se hace el cambio $X = PY$ y se resuelve el sistema $Y' = JY$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Resulta $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$. Escrito en forma matricial,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Al deshacer el cambio $X = PY$, se tiene

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

siendo $\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ las columnas de P, esto es, los autovectores asociados a los autovalores λ_1 y λ_2 respectivamente. Obsérvese que la matriz

$$\Phi(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental.

Caso 2. Si la matriz A no es diagonalizable, con un autovalor doble $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Se considera $X = PY$ y se resuelve el sistema $Y' = JY$. Queda

$$y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$$

Al sustituir en $y_1' = \lambda y_1 + y_2$ se tiene $y_1' = \lambda y_1 + c_2 e^{\lambda t}$. Esta ecuación, para cada valor de c_2 fijo, es lineal de primer orden. Al resolver, da lugar a

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

Por tanto, escrito en forma matricial,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Se deshace el cambio $X = PY$ y queda

$$X = P \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \left[(c_1 + c_2 t) \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} \right]$$

La matriz $\Phi(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$ es una matriz fundamental.

Caso 3. Si la matriz A tiene dos autovalores complejos conjugados $\lambda = a + ib, \overline{\lambda} = a - ib$, la forma canónica de Jordan es la matriz

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

La matriz de paso $P = (P^1\, P^2) \in M_2(\mathbb{C})$ tiene por columnas $P^1, P^2 = \overline{P^1}$ a los autovectores (complejos conjugados) asociados a los autovalores λ y $\overline{\lambda}$.

Se hace el cambio $X = PY$ y se resuelve el sistema

$$Y' = JY$$

Se obtiene $y_1(t) = c_1 e^{(a+ib)t}, y_2(t) = c_2 e^{(a-ib)t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ constantes arbitrarias. Escrito en forma matricial,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(a+ib)t} & 0 \\ 0 & e^{(a-ib)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Deshaciendo el cambio, obtenemos

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{(a+ib)t} & 0 \\ 0 & e^{(a-ib)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 e^{(a+ib)t} P^1 + c_2 e^{(a-ib)t} \overline{P^1}$$

que es la solución general *compleja* del sistema $X' = AX$. Nosotros deseamos encontrar la solución general real (las funciones $x_1(t), x_2(t)$ deben ser reales). Para obtenerla, basta observar que si $X(t)$ es solución compleja del sistema $X' = AX$, entonces $Re(X(t))$ e $Im(X(t))$ son soluciones reales de $X' = AX$. Si $P^1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + iv_1 \\ u_2 + iv_2 \end{pmatrix}$, se tiene $Re(P^1) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $Im(P^1) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Consideremos la solución compleja

$$e^{(a+ib)t} P^1 = e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt) \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= e^{at} \left(\cos bt \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} bt \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) +$$

$$+ i e^{at} \left(\operatorname{sen} bt \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \cos bt \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)$$

Por lo dicho arriba, tanto

$$X_1(t) = e^{at} \left(\cos bt \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} bt \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)$$

como

$$X_2(t) = e^{at} \left(\operatorname{sen} bt \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \cos bt \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)$$

son soluciones reales (e independientes) del sistema $X' = AX$, de modo que la solución general será

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt & e^{at} \operatorname{sen} bt \\ -e^{at} \operatorname{sen} bt & e^{at} \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(P^1) & Im(P^1) \end{pmatrix}$$

es la matriz de paso tal que $Q^{-1} A Q = J'$, siendo $J' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ la forma canónica real de A.

En cualquiera de los tres casos, si los dos autovalores de la matriz A son tales que $Re(\lambda) < 0$, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0, \quad i = 1, 2$$

para cualquier solución $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ del sistema $X' = AX$.

Observación 1. *Considérese una ecuación lineal de segundo orden homogénea de coeficientes constantes $x'' + a_1x' + a_2x = 0$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Mediante el cambio de variables*

$$\begin{cases} x &= x_1 \\ x' &= x_2 \end{cases}$$

se puede reducir el estudio de las soluciones de la ecuación al estudio del sistema plano equivalente

$$(1) \quad \begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -a_2x_1 - a_1x_2 \end{cases} \qquad ó \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$ es $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$. Obsérvese la relación existente entre el polinomio $p(\lambda)$ y la ecuación de segundo orden.

Utilizando lo hecho en los sistemas planos, y teniendo en cuenta que sólo nos interesa $x_1(t)$, se concluye que:

Caso 1. *Si los dos autovalores λ_1, λ_2 son reales (y distintos, ya que de ser iguales la matriz A debería ser diagonal), entonces $x(t) = x_1(t) = k_1e^{\lambda_1 t} + k_2e^{\lambda_2 t}$, siendo k_1 y k_2 constantes arbitrarias.*

Caso 2. *Si hay un autovalor real doble, λ, entonces $x(t) = x_1(t) = k_1e^{\lambda t} + k_2te^{\lambda t}$, siendo k_1 y k_2 constantes arbitrarias..*

Caso 3. *Si los autovalores son complejos conjugados, entonces $x(t) = x_1(t) = k_1e^{at}\cos bt + k_2e^{at}\operatorname{sen} bt$, siendo k_1 y k_2 constantes arbitrarias.*

1.2.2. Puntos críticos. Diagrama de fases de sistemas lineales homogéneos planos

Dado un sistema de ecuaciones del tipo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y) \end{cases}$$

decimos que un punto (x_0, y_0) es un *punto crítico* o *singular* si el vector constante

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

es solución del sistema.

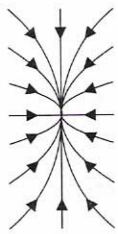
La representación gráfica de las soluciones en el plano, junto con la indicación del sentido en que se recorren, se denomina *diagrama de fases* del sistema.

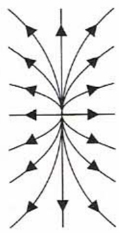
Dado el sistema $X' = AX$ con $A \in M_2(\mathbb{R})$, es claro que el vector $X = (0, 0)$ es un punto crítico. Supondremos que dicho punto crítico es aislado (no hay más en un entorno suyo). Esto implica que $Det(A) \neq 0$ y, por tanto, $\lambda = 0$ no es autovalor de A.

El análisis cualitativo de los diagramas de fases en un entorno del punto crítico $X = (0, 0)$ se hace en función de los signos de los autovalores de A, tal como queda indicado en el siguiente esquema:

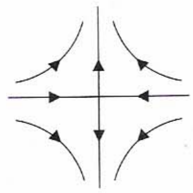
Caso 1. Las dos raíces λ_1 y λ_2 son reales y desiguales.

a) Si son del mismo signo el punto crítico de llama nodo.





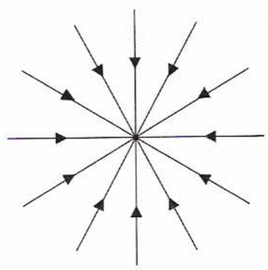
b) Si son de distinto signo el punto crítico se llama puerto o punto de silla.

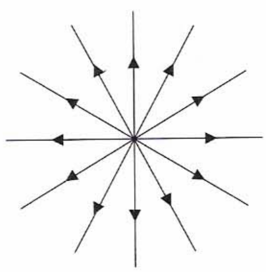


Caso 2. La raíz es doble: $\lambda_1 = \lambda_2$. Puede ser:

a) Nodo especial,

$$rango \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0$$



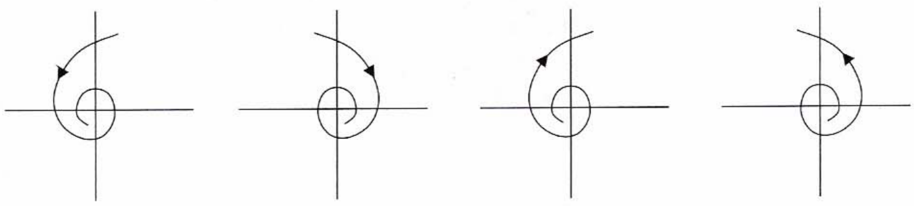


b) Nodo degenerado

$$rango \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 1.$$

Caso 3. Las dos raíces son complejas conjugadas $\lambda = \alpha \pm \beta i$.

a) Si $\alpha \neq 0$ el punto crítico se llama foco o punto de espiral:



$\alpha < 0,\ c > 0$ $\alpha < 0,\ c < 0$ $\alpha > 0\ \ c < 0,$ $\alpha > 0,\ c > 0$

b) Si $\alpha = 0$, el punto crítico se llama centro: