$$= \{v \in V \text{ tal que } (f - \lambda Id)(v) = \bar{0}\} = \text{Ker}(f - \lambda Id)$$

Obsérvese que V_λ es un subespacio vectorial de V .

Definición 2. (*Polinomio característico*)

Sea $f \in \text{End}(V)$ y sea $A = M(f, B)$ una matriz asociada al endomorfismo f para cierta base B de V . Llamamos polinomio característico asociado a A al polinomio de grado n $P(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda Id)$. A la ecuación $P(\lambda) = 0$ se le llama ecuación característica asociada a A .

Propiedades.

1. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se tiene

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{Tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \text{Det}(A)$$

2. Dos matrices semejantes tienen siempre el mismo polinomio característico. En particular, tendrán el mismo determinante y la misma traza.
3. Asignamos a f un único polinomio característico, $P(\lambda)$, que será el de cualquiera de sus matrices asociadas $A = M(f, B)$ (todas ellas son semejantes).
4. Los autovalores asociados a f serán las raíces $\lambda_i \in \mathbb{K}$ de $P(\lambda) = 0$.
5. Dado V_λ un subespacio propio de f , $\dim(V_\lambda) = n - r(A - \lambda Id)$ para cualquier matriz A asociada a f .
6. Si $\{v_1, \dots, v_r\}$ son vectores propios asociados a autovalores distintos de f , entonces $\{v_1, \dots, v_r\}$ son l.i..
7. Si $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_r}$ son subespacios propios asociados a autovalores distintos de f , entonces $V_{\lambda_i} \cap (\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j}) = \bar{0}$.

1.2. ENDOMORFISMOS DIAGONALIZABLES

Definición 3. (*Multiplicidades algebraica y geométrica*)

Sea $f \in \text{End}(V)$ con autovalores asociados $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$.

1. Llamamos multiplicidad algebraica del autovalor λ_i al mayor exponente α_i para el cual el factor $(\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i}$ aparece en la factorización de $P(\lambda)$ ($P(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i} q(\lambda)$).
2. Llamamos multiplicidad geométrica de λ_i a la dimensión del subespacio propio V_{λ_i} .

Observación 1. Sea $f \in \text{End}(V)$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de multiplicidad algebraica α , entonces

$$1 \leq \dim(V_\lambda) \leq \alpha$$

Definición 4. (Endomorfismo diagonalizable)

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal D . Decimos que $f \in \text{End}(V)$ es diagonalizable si existe una base B de V respecto de la cual la matriz asociada a f , $M(f, B)$, es diagonal.

Propiedades.

1. $f \in \text{End}(V)$ es diagonalizable si y sólo si cualquier matriz $A = M(f, B)$ asociada a él es diagonalizable.
2. f es diagonalizable si y sólo si existe una base de V formada por vectores propios de f .

Aunque el siguiente teorema es válido en cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, lo enunciaremos para el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Teorema 1. Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con $\dim(V) = n$ y sea $f \in \text{End}(V)$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ los autovalores de f de multiplicidades algebraicas $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Entonces f es diagonalizable si y sólo si:

- i) $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n$ (todas las raíces de $P(\lambda)$ son reales).
- ii) Para cada autovalor λ_i se tiene que $\dim(V_{\lambda_i}) = \alpha_i$.

Corolario 1. i) Si $\dim(V) = n$ y $f \in \text{End}(V)$ tiene n autovalores distintos, entonces f es diagonalizable.

- ii) Si $f \in \text{End}(V)$ es diagonalizable con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, entonces se tiene la suma directa $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$, esto es, $V = V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_r}$ y $V_{\lambda_i} \cap (\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j}) = \bar{0}$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

1.3. ALGORITMO DE DIAGONALIZACIÓN

Dado V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) y dado $f \in \text{End}(V)$, consideremos $A = M(f, B_0)$ una matriz asociada a f con respecto a cierta base B_0 fija. Ofrecemos, a modo de resumen, el siguiente algoritmo que permite determinar cuándo f es diagonalizable y, en caso de serlo, calcula explícitamente una matriz diagonal asociada a f , $D = M(f, B)$, con respecto a cierta base B , así como la matriz de cambio de base $P = M(B, B_0)$ que verifica $D = P^{-1}AP$.

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & V \\
 \\
 P & \begin{array}{ccc} x_B & \xrightarrow{D} & y_B \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_{B_0} & \xrightarrow{A} & y_{B_0} \end{array} & P
 \end{array}$$

Nuestro objetivo es encontrar otra matriz J , lo más parecida a una matriz diagonal que sea posible, tal que $J = P^{-1}AP$ para cierta P regular. Las columnas de P determinan una base B de V respecto de la cual la matriz asociada a f es J . Dicha matriz J recibirá el nombre de *forma canónica de Jordan* de A .

Denominamos *matriz elemental de Jordan* de orden k y autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ a una matriz de orden k cuyos elementos son ceros salvo en la diagonal principal, donde valen λ , y en la diagonal situada inmediatamente encima, formada por unos.

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Las formas canónicas de Jordan serán matrices cuadradas formadas por la yuxtaposición de matrices elementales de Jordan a lo largo de la diagonal, como veremos más adelante.

Proposición 1. *Sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo, con V un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión n , y sea λ un autovalor de multiplicidad algebraica r . Entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que*

$$E_1(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda Id) \subsetneq E_2(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda Id)^2 \subsetneq \dots$$

$$\dots \subsetneq E_p(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda Id)^p = E_{p+1}(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda Id)^{p+1} \dots$$

Además, si denotamos $d_i = \dim(E_i(\lambda))$, se tiene que $d_1 < d_2 < \dots < d_p = r$. El subespacio $E_p(\lambda)$ se denomina autoespacio máximo asociado a λ y es invariante. Lo denotaremos por $E_p(\lambda) = M(\lambda)$.

Teorema 2. *En las condiciones de la proposición anterior,*

$$V = M(\lambda_1) \oplus \dots \oplus M(\lambda_s)$$

siendo $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ los autovalores de f .

Para cada subespacio $M(\lambda_i)$, la aplicación lineal $f|_{M(\lambda_i)} : M(\lambda_i) \rightarrow M(\lambda_i)$ admite una base $B(\lambda_i)$ tal que la matriz asociada a $f|_{M(\lambda_i)}$ con respecto a ella es una matriz de Jordan del tipo

1. Se toman $j_p = d_p - d_{p-1}$ vectores linealmente independientes de $E_p(\lambda) \setminus E_{p-1}(\lambda)$. Los denotamos por $F_p = \{v_1, \dots, v_{j_p}\}$. La familia de vectores

$$B_p(\lambda) = \{(f - \lambda Id)^{p-1}v_1, \dots, (f - \lambda Id)v_1, v_1, \dots, (f - \lambda Id)^{p-1}v_{j_p}, \dots, (f - \lambda Id)v_{j_p}, v_{j_p}\}$$

genera una familia de j_p matrices elementales de Jordan de orden p , $J_p(\lambda)$.

2. Se toman a continuación $j_{p-1} = d_{p-1} - d_{p-2} - j_p$ vectores linealmente independientes de $E_{p-1}(\lambda) \setminus E_{p-2}(\lambda)$ y que sean independientes de la familia $B_p(\lambda)$. Denotamos a esta nueva familia por $F_{p-1} = \{w_1, \dots, w_{j_{p-1}}\}$. Consideramos los vectores

$$B_{p-1}(\lambda) = \{(f - \lambda Id)^{p-2}w_1, \dots, (f - \lambda Id)w_1, w_1, \dots, (f - \lambda Id)^{p-2}w_{j_{p-1}}, \dots, (f - \lambda Id)w_{j_{p-1}}, w_{j_{p-1}}\}$$

Con esta familia de vectores se generan j_{p-1} matrices elementales de Jordan de orden $p-1$, $J_{p-1}(\lambda)$.

3. Se repite el paso 2 reiteradamente para construir las familias $B_k(\lambda)$. De este modo llegamos a $E_1(\lambda)$, donde se escogen los vectores necesarios para que, unidos a $B_2(\lambda) \cup \dots \cup B_p(\lambda)$, den lugar a una base $B(\lambda)$ del subespacio $M(\lambda)$.

Teorema 3. Todo endomorfismo f definido en un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial V de dimensión n admite una base con respecto a la cual la matriz asociada es una forma canónica de Jordan J . Esta forma canónica es única, salvo por permutaciones de las matrices de Jordan elementales que la componen.

Observación 2. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ tiene n autovalores iguales λ , entonces $(A - \lambda Id)^n = 0$.

A continuación veremos cómo obtener las matrices J y P para dimensiones bajas.

1.4.1. Forma de Jordan de matrices de orden 2

Proposición 3. Dada una matriz $A \in M_2(\mathbb{C})$, existe una forma canónica de Jordan $J \in M_2(\mathbb{C})$ de uno de los siguientes tipos:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. La primera de las matrices se obtiene cuando los dos autovalores son distintos, pudiendo ser complejos conjugados. La segunda matriz se obtiene cuando existe un único autovalor (descartamos la situación trivial en que $A = \lambda Id$). En ambos casos existe una matriz regular $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $J = P^{-1}AP$.

Si $A \in M_2(\mathbb{R})$ y se buscan $J, P \in M_2(\mathbb{R})$, en el primero de los dos tipos, la matriz J puede no ser real (si los dos autovalores son complejos conjugados $\lambda = \alpha + \beta i$, $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$, se tiene que $J \notin M_2(\mathbb{R})$). En ese caso la matriz $J' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ es real y se llama forma de Jordan real de la matriz real A . Existirá una matriz regular $Q \in M_2(\mathbb{R})$ (cuyas columnas son las partes real e imaginaria respectivamente de las columnas de P) tal que $Q^{-1}AQ = J'$.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya expresión matricial respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Se tiene $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, de modo que $\lambda = 2$ es un autovalor doble. Sin embargo, su multiplicidad geométrica es 1, de modo que A no es diagonalizable. Vamos a calcular las matrices J y P tales que $J = P^{-1}AP$ con P regular. Como A no es diagonalizable, es claro que $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Sea $E_1(2) = V_2 = Ker(A - 2Id)$. Se tiene que $E_1(2) = L\{(1, 1)\}$, esto es, $dim(E_1(2)) = 1$. Sea $E_2(2) = Ker(A - 2Id)^2$. Es claro que $E_1(2) \subseteq E_2(2)$. Por la última observación, resulta que $E_2(2) = Ker(0) = \mathbb{R}^2$.

Escogemos ahora un vector $u_2 \in E_2(2) \setminus E_1(2)$, por ejemplo $u_2 = (1, 0)$. Sea $u_1 = (A - 2Id)u_2 = (-2, -2) \in E_1$. Entonces, la familia $B = \{u_1, u_2\}$ es base de $\mathbb{R}^2$ tal que $M(f, B) = J$ y la matriz $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ cumple $J = P^{-1}AP$.

Ejemplo 2

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. El polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - (1+2i))(\lambda - (1-2i))$ (dos autovalores complejos conjugados). Calculemos la forma canónica de Jordan J y una matriz de paso $P \in M_2(\mathbb{C})$ así como la forma canónica real J' y una matriz de paso $Q \in M_2(\mathbb{C})$.

Se tiene $J = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}$. Para determinar P procedemos como sigue:

$$E_1(1+2i) = V_{1+2i} = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^2 : (A - (1+2i)Id)\vec{x} = \vec{0}\}$$

Se tiene el sistema

$$\begin{cases} (2-2i)x_1 + 2x_2 & = 0 \\ -4x_1 + (-2-2i)x_2 & = 0 \end{cases}$$

Al ser las dos ecuaciones proporcionales, queda $E_1(1+2i) = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^2 : (1-i)x_1 + x_2 = 0\}$. Tras pasar a paramétricas, resulta $E_1(1+2i) = L\{(1, -1+i)\}$. El vector

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

es un generador del subespacio $E_1(1+2i) \subset \mathbb{C}^2$ (autovector del autovalor $\lambda = 1+2i$). Dicho de otro modo, $A\vec{x} = (1+2i)\vec{x}$.

Como $A\vec{x} = (1+2i)\vec{x}$, tomando conjugados en ambos lados de la igualdad, y teniendo en cuenta que $\bar{A} = A$ al ser ésta real, queda $A\bar{\vec{x}} = (1-2i)\bar{\vec{x}}$, esto es, el vector

$$\bar{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

es autovector de $\bar{\lambda} = 1-2i$, de modo que, sin hacer cálculos, sabemos que $E_1(1-2i) = V_{1-2i} = L\{(1, -1-i)\}$. La matriz de paso P tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base de $\mathbb{C}^2$, $B = \{\vec{x}, \bar{\vec{x}}\}$, esto es, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+i & -1-i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Resulta fácil comprobar que $J = P^{-1}AP$.

La forma canónica real es $J' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, mientras que la matriz de paso Q se obtiene de la matriz P eligiendo los vectores $Re(\vec{x})$ y $Im(\vec{x})$, que son base de $\mathbb{R}^2$, como columnas. Se tiene $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Resulta fácil comprobar que $J' = Q^{-1}AQ$.

1.4.2. Forma de Jordan de matrices de orden 3

Proposición 4. Dada una matriz $A \in M_3(\mathbb{C})$, distinguimos tres casos a la hora de construir $J \in M_3(\mathbb{C})$.

i) Si existe un único autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$, $J \in M_3(\mathbb{C})$ toma una de las siguientes formas:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Hemos descartado el caso trivial en el que $A = \lambda Id$. Si $A \in M_3(\mathbb{R})$, se tiene que $\lambda \in \mathbb{R}$ y, por tanto, $J, P \in M_3(\mathbb{R})$.

ii) Si existen dos autovalores distintos (λ doble y μ simple), entonces $J \in M_3(\mathbb{C})$ toma una de las siguientes formas:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Si $A \in M_3(\mathbb{R})$, se tiene que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y, por tanto, $J, P \in M_3(\mathbb{R})$.

iii) Si existen tres autovalores distintos, la matriz $J \in M_3(\mathbb{C})$ es diagonal.

Si $A \in M_3(\mathbb{R})$, o bien los tres autovalores son reales, en cuyo caso

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \text{ o bien hay dos autovalores complejos conjugados}$$

dos $\lambda = \alpha + \beta i, \bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ y uno real μ , en cuyo caso $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$

no es una matriz real. Si buscamos la forma canónica real J' de A , tendremos

$$J' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}). \text{ Existe también una matriz de}$$

paso $Q \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $J' = Q^{-1}AQ$.

Ejemplo 3

Determinar la forma canónica de Jordan y la matriz de paso de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se tiene $p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda + 2)^2$. Además $E_1(2) = \text{Ker}(A - 2Id) = L\{(1, 1, -1)\}$ y $E_1(-2) = \text{Ker}(A + 2Id) = L\{(1, -1, 1)\}$. Esto implica que A no es diagonalizable al no coincidir las multiplicidades algebraica y geométrica para $\lambda = -2$. Sin embargo, hemos obtenido ya dos autovectores, uno por cada autovalor.

Calculemos la matriz de paso P . Como la multiplicidad algebraica de $\lambda = 2$ es $r = 1$, se tiene $M(2) = E_1(2)$. Una base asociada a $M(2)$ es $B(2) = \{u_1 = (1, 1, -1)\}$. Por otro lado, la multiplicidad algebraica de $\lambda = -2$ es $r = 2$, mientras que $\dim(E_1(-2)) = 1$. Se tiene

$$E_2(-2) = \text{Ker}(A + 2Id)^2 = L\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$$

con $\dim(E_2(-2)) = 2$. De modo que $M(-2) = E_2(-2)$. Buscamos una base adecuada de vectores de $M(-2)$, $B(-2)$, de modo que la matriz asociada a nuestra aplicación lineal con respecto a la base $B = B(2) \cup B(-2)$ sea una forma canónica de Jordan J .

Construyamos la familia de vectores $B(-2)$. Elegimos una familia de $\dim(E_2(-2)) - \dim(E_1(-2)) = 1$ vectores que estén en $E_2(-2) \setminus E_1(-2)$; por ejemplo, $u_3 = (0, 0, 1)$. A continuación consideramos el vector

$$u_2 = (A + 2Id)u_3 = (1, -1, 1)$$

De este modo conseguimos una base $B(-2) = \{u_2, u_3\}$ tal que, unida a $B(2)$, nos da $B = B(2) \cup B(-2) = \{u_1, u_2, u_3\}$, una base de $\mathbb{R}^3$. Obsérvese que

$$Au_1 = 2u_1, \quad Au_2 = -2u_2, \quad Au_3 = u_2 - 2u_3$$

En consecuencia, la matriz asociada a A respecto a la base B es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

con matriz de paso

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices $J(2) = (2)$ y $J(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ son matrices elementales de Jordan asociadas a los autovalores 2 y -2 . Cada una representa la expresión matricial de la aplicación lineal en los subespacios $M(2)$ y $M(-2)$ respecto de las bases $B(2)$ y $B(-2)$.

Se comprueba fácilmente que $P^{-1}AP = J$.

Ejemplo 4

Determinar la forma canónica de Jordan y la matriz de paso de

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Ocurre que $p(\lambda) = -(\lambda + 2)^3$. Además $E_1(-2) = \text{Ker}(A + 2Id) = L\{(1, 1, 1)\}$. Esto implica que A no es diagonalizable al no coincidir las multiplicidades algebraica y geométrica para $\lambda = -2$. Sin embargo, hemos obtenido ya un autovector.

Se tiene

$$E_1(-2) = L\{(1, 1, 1)\} \subsetneq E_2(-2) = L\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\} \subsetneq E_3(-2) = \mathbb{R}^3$$

De modo que $M(-2) = \mathbb{R}^3$ con $p = 3$. Buscamos una base adecuada de vectores de $M(-2) = \mathbb{R}^3$, $B(-2)$, tal que la matriz asociada a nuestra aplicación lineal con respecto a esta base sea una forma canónica de Jordan J . Elegimos una familia de $\dim(E_3(-2)) - \dim(E_2(-2)) = 1$ vectores que estén en $E_3(-2) \setminus E_2(-2)$, por ejemplo $u_3 = (1, 0, 0)$. A continuación consideramos los vectores $(A + 2Id)u_3, \dots, (A + 2Id)^{p-1}u_3$, esto es:

$$u_2 = (A + 2Id)u_3 = (0, -1, 0), \quad u_1 = (A + 2Id)u_2 = (-1, -1, -1)$$

De este modo conseguimos una base de $\mathbb{R}^3$, $B(-2) = \{u_1, u_2, u_3\}$ tal que

$$Au_1 = -2u_1, \quad Au_2 = u_1 - 2u_2, \quad Au_3 = u_2 - 2u_3$$

En consecuencia, la matriz asociada a la aplicación lineal respecto a la base $B(-2)$ es

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

con matriz de paso

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se comprueba fácilmente que $P^{-1}AP = J$.

Ejemplo 5

Determinar la forma canónica de Jordan y la matriz de paso de

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene $p(\lambda) = -(\lambda + 1)^3$. Además,

$$E_1(-1) = \text{Ker}(A + Id) = L\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}.$$

Esto implica que A no es diagonalizable al no coincidir las multiplicidades algebraica y geométrica para $\lambda = -1$. Sin embargo, hemos obtenido ya dos autovectores.

Se tiene

$$E_1(-1) = L\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\} \subsetneq E_2(-1) = \mathbb{R}^3$$

De modo que $M(-1) = \mathbb{R}^3$ con $p = 2$. Buscamos una base adecuada de vectores de $M(-1) = \mathbb{R}^3$, $B(-1)$, tal que la matriz asociada a nuestra aplicación lineal con respecto a esta base sea una forma canónica de Jordan J . Elegimos una familia de $\dim(E_2(-1)) - \dim(E_1(-1)) = 1$ vectores que estén en $E_3(-1) \setminus E_2(-1)$; por ejemplo, $u_3 = (1, 0, 0)$. A continuación consideramos los vectores $(A + Id)u_3, \dots, (A + Id)^{p-1}u_3$, esto es,

$$u_2 = (A + Id)u_3 = (-1, 0, -1)$$

Tenemos los vectores $\{u_2, u_3\}$. Al faltar un vector para conseguir una base de $\mathbb{R}^3$, se escoge un vector de $E_1(-1)$ que sea independiente de la familia $\{u_2, u_3\}$, por ejemplo $u_1 = (0, 1, 0)$. De este modo, conseguimos una base de $\mathbb{R}^3$, $B(-1) = \{u_1, u_2, u_3\}$, tal que

$$Au_1 = -u_1, \quad Au_2 = -u_2, \quad Au_3 = u_2 - u_3$$

En consecuencia, la matriz asociada a la aplicación lineal respecto a la base $B(-1)$ es

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con matriz de paso

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se comprueba fácilmente que $P^{-1}AP = J$.

Ejemplo 6

Determinar la forma canónica de Jordan y la matriz de paso de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Se tiene $p(\lambda) = (-4 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 8)^2 = (-4 - \lambda)(\lambda - (2 + 2i))(\lambda - (2 - 2i))$. Obtenemos un autovalor real y dos complejos conjugados.

Entonces

$$V_{2+2i} = E_1(2 + 2i) = \text{Ker}(A - (2 + 2i)Id) = L\{u_1 = (3 + i, -1 - 7i, 1)\}$$

Además, tal como ocurría en el caso de matrices de orden 2,

$$V_{2-2i} = E_1(2-2i) = \text{Ker}(A - (2-2i)Id) = L\{u_2 = (3-i, -1+7i, 1)\}$$

Por otro lado,

$$V_{-4} = E_1(-4) = L\{u_3 = (0, 0, 1)\}$$

De modo que la matriz asociada a la aplicación lineal con respecto a la base de $\mathbb{C}^3$, $B = \{u_1, u_2, u_3\}$, es la forma canónica de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 2+2i & 0 & 0 \\ 0 & 2-2i & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso será

$$P = \begin{pmatrix} 3+i & 3-i & 0 \\ -1-7i & -1+7i & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se comprueba con facilidad que $P^{-1}AP = J$. Obsérvese que $J, P \notin M_3(\mathbb{R})$.

Si consideramos, tal como se hacía en el caso de las matrices de orden 2, la base de $\mathbb{R}^3$, $B' = \{\text{Re}(u_1), \text{Im}(u_1), u_3\}$, tenemos que la matriz asociada a la aplicación lineal respecto de B' es la forma canónica real

$$J' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso $Q \in M_3(\mathbb{R})$ asociada a A será

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Naturalmente, $J' = Q^{-1}AQ$.