

1. ESPACIOS VECTORIALES

1.1. ESPACIOS VECTORIALES. SUBESPACIOS VECTORIALES

Definición 1. (*Espacio vectorial*)

Decimos que un conjunto no vacío V es un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} , o \mathbb{K} -espacio vectorial, si en él se han definido dos operaciones, una interna y otra externa, llamadas respectivamente suma y producto por un escalar que pasamos a describir.

La suma de dos elementos (o vectores) $u, v \in V$ da lugar a otro elemento de V , que denotamos $u + v$, y que tiene las propiedades:

$$(S1) \text{ Asociativa: } (u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V.$$

$$(S2) \text{ Conmutativa: } u + v = v + u \quad \forall u, v \in V.$$

$$(S3) \text{ Existencia de elemento neutro: } \exists \bar{0} \in V \text{ tal que } \bar{0} + v = v + \bar{0} = v \quad \forall v \in V$$

$$(S4) \text{ Existencia de elemento opuesto: } \forall v \in V \text{ existe otro vector } -v \in V \text{ tal que } v + (-v) = \bar{0}.$$

El producto de un escalar, o elemento del cuerpo \mathbb{K} , por un vector da lugar a otro elemento de V , y tiene las propiedades:

$$(M1) a(u+v) = au+av \text{ para todo } a \in \mathbb{K} \text{ y para todo par de vectores } u, v \in V.$$

$$(M2) (a + b)u = au + bu \text{ para todo par de escalares } a, b \in \mathbb{K} \text{ y para todo } u \in V.$$

$$(M3) a(bu) = (ab)u \text{ para todo } u \in V \text{ y } a, b \in \mathbb{K}.$$

$$(M4) 1u = u \text{ para todo } u \in V, \text{ donde } 1 \text{ es la unidad para el producto en } \mathbb{K}.$$

Las primeras cuatro propiedades hacen referencia a la suma de vectores y se resumen diciendo que $(V, +)$ es un *grupo conmutativo*.

Trabajaremos habitualmente con el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si bien todos los resultados que se obtienen en este capítulo son válidos en cualquier cuerpo \mathbb{K} .

Observación 1. *De las propiedades enunciadas se deducen las siguientes:*

1. $0u = \bar{0}$, 2. $a\bar{0} = \bar{0}$, 3. Si $au = \bar{0}$, entonces $a = 0$ ó $u = \bar{0}$,
4. $(-a)u = a(-u) = -(au)$.

Definición 2. (*Subespacio vectorial*)

Un subconjunto W del espacio vectorial V es un subespacio vectorial de V si cumple:

- i) W es cerrado para la suma: si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$.

ii) W es cerrado para el producto por escalares: si $u \in W$ y $a \in \mathbb{K}$, entonces $au \in W$.

Estas dos condiciones se pueden resumir en una escribiendo:

iii) $au + bv \in W$ para todo $u, v \in W$ y $a, b \in \mathbb{K}$.

Observación 2. 1. Si W es un subespacio vectorial de V , entonces $\bar{0} \in W$.

2. Todo subespacio vectorial W de V tiene asimismo estructura de espacio vectorial con las mismas operaciones que V .

Definición 3. (Combinación lineal)

Diremos que un vector $v \in V$ es combinación lineal de la familia $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ si $v = a_1v_1 + \dots + a_mv_m$ con $a_i \in \mathbb{K}$ para todo $i = 1, \dots, m$.

Sea S un subconjunto del espacio vectorial V y sea $L(S)$ el conjunto formado por todas las combinaciones lineales de elementos de S :

$$L(S) = \{a_1v_1 + \dots + a_mv_m \text{ tal que } m \in \mathbb{N}, v_i \in S, a_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, m\}$$

Al conjunto $L(S)$ se le llama *envolvente lineal* de S o *subespacio generado* por S y es el menor subespacio vectorial de V que contiene al conjunto S , esto es, si $S \subset W$, con W un subespacio vectorial de V , entonces $L(S) \subset W$.

1.2. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL. BASES

Definición 4. (Dependencia e independencia lineal)

Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y sean $v_1, \dots, v_m \in V$. Se dice que la familia de vectores $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ es linealmente dependiente si existen $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m = \bar{0}$$

o, dicho de otro modo, si existe un vector $v_i \in S$ que se puede poner como combinación lineal del resto.

Se dice que el conjunto de vectores $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente si no es linealmente dependiente, esto es, de ser cierta la igualdad

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m = \bar{0},$$

entonces $a_1 = \dots = a_m = 0$. Esto equivale a decir que ningún vector de S se puede poner como combinación lineal del resto.

Observación 3. 1. $\{v_1\}$ es l.i. (linealmente independiente) si y sólo si $v_1 \neq \bar{0}$.

2. Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ es l.d. (linealmente dependiente), entonces

$$\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+r}\}$$

también es l.d..

3. Si $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+r}\}$ es l.i., entonces $\{v_1, \dots, v_m\}$ es l.i..

Definición 5. (Sistema de generadores)

Un conjunto de vectores $S \subset V$ es un sistema de generadores del espacio vectorial V si $L(S) = V$.

Propiedades.

1. Si $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ es un sistema de generadores de V , con v_i combinación lineal de los restantes vectores, entonces $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m\}$ es también un sistema de generadores de V .
2. Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ son l.i., entonces cualquier sistema de generadores de V tendrá, al menos, m elementos.

Definición 6. (Base)

Una familia de vectores $B \subset V$ es una base del espacio vectorial V si es linealmente independiente y sistema de generadores de V .

Si V admite una base finita $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de n vectores, lo llamaremos espacio vectorial de dimensión finita. Diremos que la dimensión de V es n , $\dim(V) = n$.

Propiedades. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n . Entonces:

1. Cada vector $v \in V$ se podrá escribir de modo único como combinación lineal de los elementos de cualquier base.
2. (Teorema de la base) Todas las bases de V tienen n vectores.
3. (Teorema de ampliación de la base) Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ una familia de vectores l.i. de V . Entonces S se puede ampliar a otra familia $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ que es una base de V .
4. Si $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ son n vectores de V linealmente independientes, entonces son también base de V .
5. Si $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ contiene más de n vectores, S es linealmente dependiente.
6. Si $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ es sistema de generadores de V , cualquier número máximo de vectores linealmente independientes de S es base de V .
7. Una familia de vectores $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ es base de un subespacio vectorial $W \subset V$ si S es linealmente independiente y $L(S) = W$.

1.3. SUBESPACIO GENERADO POR LAS FILAS DE UNA MATRIZ

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Las filas de A ,

$$A_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \quad \dots, \quad A_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$$

pueden verse como vectores de \mathbb{K}^n y, por tanto, podemos decir que generan un subespacio de \mathbb{K}^n llamado *espacio fila de A* y que denotamos por $F(A)$, esto es:

$$F(A) = L(A_1, \dots, A_m).$$

Propiedades.

1. Si al realizar operaciones elementales sobre las filas de A obtenemos una nueva matriz B , entonces $F(A) = F(B)$.
2. Si E es una matriz escalonada asociada a A , entonces los vectores fila no nulos de E son base de $F(A) = F(E)$.
3. Para saber si dos subespacios engendrados por dos familias de vectores de \mathbb{K}^n son iguales, basta ver si las dos matrices cuyas filas son las coordenadas de los vectores de las dos familias dan lugar a la misma matriz escalonada reducida.
4. El rango de una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ coincide con el número máximo de vectores fila l.i. (la dimensión de $F(A)$), y con el número máximo de vectores columna l.i..

1.4. ECUACIONES CARTESIANAS Y PARAMÉTRICAS DE UN SUBESPACIO

Dado un sistema homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas (I) $A\bar{x} = \bar{0}$, con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, y dado el conjunto $W = \{\text{soluciones de (I)}\}$, a (I) lo llamaremos *ecuaciones cartesianas* (o *implícitas*) de W .

Propiedades.

1. W es un subespacio vectorial de \mathbb{K}^n con $\dim(W) = n - r$ siendo r el rango de A .
2. El sistema homogéneo (II) $B\bar{x} = \bar{0}$, con B una matriz obtenida de A mediante operaciones elementales sobre las filas, es *equivalente* a (I), esto es, tiene las mismas soluciones. Reduciremos el problema de resolver (I) al de resolver (II) $E\bar{x} = \bar{0}$ con E una matriz escalonada asociada a A .

1.5 SUMA E INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS. SUMA DIRECTA 5

Sea W un subespacio vectorial de \mathbb{K}^n con $\dim(W) = m \leq n$ y sea $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W con $w_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$ para $i = 1, \dots, m$. Entonces cualquier vector $x = (x_1, \dots, x_n) \in W$ se escribe como $(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1(a_{11}, \dots, a_{n1}) + \dots + \lambda_m(a_{1m}, \dots, a_{nm})$.

Si igualamos las coordenadas, quedan las *ecuaciones paramétricas* de W :

$$\begin{cases} x_1 &= a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots + a_{1m}\lambda_m \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \dots + a_{nm}\lambda_m \end{cases}$$

Como vemos, a partir de una base de W obtenemos automáticamente las ecuaciones paramétricas.

1.5. SUMA E INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS. SUMA DIRECTA

Definición 7. (*Intersección de subespacios vectoriales*)

Sean U y W subespacios vectoriales de V . La intersección de U y W , $U \cap W$, es el conjunto

$$U \cap W = \{v \in V \text{ tal que } v \in U \text{ y } v \in W\}$$

Propiedades.

1. $U \cap W$ es un subespacio vectorial de V . En general, tendremos que la intersección de cualquier familia de subespacios vectoriales de V , $\bigcap_i U_i$, es un subespacio vectorial de V .
2. Si U y W son subespacios vectoriales de \mathbb{K}^n , las ecuaciones cartesianas de $U \cap W$ serán las ecuaciones resultantes de unir las de U y las de W .

Definición 8. (*Suma de subespacios vectoriales*)

Dados U, W subespacios vectoriales de V , llamamos suma de U y W , denotada por $U + W$, al conjunto

$$U + W = \{u + w \text{ tal que } u \in U, w \in W\}$$

Propiedades.

1. $U + W$ es un subespacio vectorial de V que contiene al conjunto $U \cup W$. De hecho, es el menor subespacio vectorial que contiene a $U \cup W$, esto es, $U + W = L(U \cup W)$.
2. De manera análoga se puede definir la suma de cualquier familia de subespacios vectoriales $\{U_i\}$ de V como $\sum_i U_i = L(\bigcup_i U_i)$.
3. (Fórmula de las dimensiones) Si V es de dimensión finita y U, W son subespacios vectoriales suyos, entonces $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Definición 9. (*Suma directa de dos subespacios*)

Un espacio vectorial V es suma directa de los subespacios U, W , escrito $V = U \oplus W$, si $U \cap W = \{\bar{0}\}$ y $V = U + W$.

Es fácil probar que $V = U \oplus W$ si y sólo si cada vector $v \in V$ se escribe de modo único como $v = u + w$ para ciertos $u \in U$ y $w \in W$.

También es posible definir la *suma directa para más de dos subespacios vectoriales*. Decimos que V es suma directa de los subespacios vectoriales U_1, \dots, U_n , escrito $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$, si todo vector $v \in V$ se puede escribir de modo único como $v = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, con $u_i \in U_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. De manera equivalente, $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$ si:

1. $V = L(U_1 \cup \dots \cup U_n)$ y
2. $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{\bar{0}\}$.

1.6. COORDENADAS Y CAMBIO DE BASE

A continuación desarrollamos la herramienta que nos permitirá trabajar en un K -espacio vectorial V de dimensión finita n como si estuviéramos en \mathbb{K}^n .

Definición 10. (*Coordenadas de un vector respecto de una base*)

Dado un \mathbb{K} -espacio vectorial V de dimensión finita n y dada una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, cada vector $x \in V$ tiene una única expresión en función de los vectores de B de la forma

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Llamaremos a $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ coordenadas de x respecto de la base B y lo representaremos por $x_B = (x_1, \dots, x_n)$.

Propiedades. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita n y sea B una base de V . Si $x, y \in V$ tienen coordenadas (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_n) respecto de B , esto es, $x_B = (x_1, \dots, x_n)$, $y_B = (y_1, \dots, y_n)$, entonces:

1. $[x + y]_B = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.
2. $[ax]_B = (ax_1, \dots, ax_n)$.
3. Dado un conjunto de vectores $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ de V , tendremos que S es l.i., l.d., sistema de generadores o base de V si y sólo si lo son sus vectores de coordenadas respecto de B en \mathbb{K}^n .

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita n y dadas dos bases distintas

$$B = \{e_1, \dots, e_n\} \text{ y } B' = \{e'_1, \dots, e'_n\},$$

queremos determinar la relación entre las coordenadas de un mismo vector x respecto de las dos bases. Consideremos las coordenadas de los vectores de B' en la base B :

$$\begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n \\ &\vdots \\ e'_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

Sea $x \in V$ con coordenadas $x_B = (x_1, \dots, x_n)$ y $x_{B'} = (x'_1, \dots, x'_n)$ respecto de las bases B y B' , esto es,

$$x_1e_1 + \dots + x_n e_n = x = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n.$$

Entonces

$$x_1e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1(a_{11}e_1 + \dots + a_{n1}e_n) + \dots + x'_n(a_{1n}e_1 + \dots + a_{nn}e_n)$$

Reordenando términos, queda:

$$x_1e_1 + \dots + x_n e_n = (a_{11}x'_1 + \dots + a_{1n}x'_n)e_1 + \dots + (a_{n1}x'_1 + \dots + a_{nn}x'_n)e_n.$$

De modo que:

$$\begin{cases} x_1 &= a_{11}x'_1 + \dots + a_{1n}x'_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}x'_1 + \dots + a_{nn}x'_n \end{cases}$$

Éstas son las *ecuaciones de cambio de base* de B' a B . Si P es la matriz

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces tenemos que $x_B = Px_{B'}$, esto es,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Decimos que ésta es la *ecuación matricial* del cambio de base. A la matriz P se la llama *matriz de cambio de base* de B' a B o *matriz de paso*, escribiéndose $P = M(B', B)$, y nos permite determinar las coordenadas de

un vector x en la base B a partir de sus coordenadas en la base B' . Obsérvese que las columnas de P son las coordenadas de los vectores de B' respecto de B . Además, P es regular y, por tanto, $x_{B'} = P^{-1}x_B$, fórmula que nos da las coordenadas de un vector x en la base B' a partir de sus coordenadas en la base B . Escribimos $P^{-1} = M(B, B')$.