1. CONTINUIDAD EN VARIAS VARIABLES

1.1. PRIMERAS DEFINICIONES. LÍMITES

Definición 1.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Una función real de varias variables es una aplicación $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$. A las funciones $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $f_i(x_1, \ldots, x_n) = y_i$ se las llama funciones coordenadas.*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

Definición 1.2. *Se llama dominio de una función f al conjunto*

$$D(f) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \exists\, f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m\} = D(f_1) \cap D(f_2) \cap \cdots \cap D(f_m)$$

siendo $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Definición 1.3. *Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se llama grafo de f al conjunto de puntos*

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$$

Definición 1.4. *Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y dada una constante c, se define la curva de nivel c de la superficie $z = f(x, y)$ como el conjunto de puntos*

$$\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

De igual manera, dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y dada una constante c, se define la superficie de nivel c como el conjunto de puntos

$$\Gamma_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$$

Definición 1.5. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sean $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ y $\bar{l} \in \mathbb{R}^m$. Entonces se dice que $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{l}$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < d(\bar{x}, \bar{a}) < \delta$, entonces $d(f(\bar{x}), \bar{l}) < \epsilon$.*

Propiedades.

1. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Entonces

   1.1. Si $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{l}_1$ y $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} g(\bar{x}) = \bar{l}_2$ entonces

   $$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} (f(\bar{x}) + g(\bar{x})) = \bar{l}_1 + \bar{l}_2$$

   1.2. Si $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{l}_1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

   $$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} \alpha f(\bar{x}) = \alpha \bar{l}_1$$

2. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = l_1$ y $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} g(\bar{x}) = l_2$. Sea también $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Entonces
   2.1. $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}}(f(\bar{x}) + g(\bar{x})) = l_1 + l_2$
   2.2. $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}}(f(\bar{x})g(\bar{x})) = l_1 l_2$
   2.3. $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} \alpha f(\bar{x}) = \alpha l_1$
   2.4. $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = \frac{l_1}{l_2}$ $(l_2 \neq 0)$
   2.5. $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})^{g(\bar{x})} = l_1^{l_2}$ $(l_1 > 0)$.
   2.6. $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} h(f(\bar{x})) = h(l_1)$
   2.7. $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = l_1 \Leftrightarrow \lim_{\bar{x}\to\bar{a}}(f(\bar{x}) - l_1) = 0$
   2.8. $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\bar{x}\to\bar{a}} |f(\bar{x})| = 0$

Teorema 1.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $f = (f_1, \ldots, f_m)$ las funciones coordenadas. Entonces*

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = (l_1, \ldots, l_m) \Leftrightarrow \lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f_i(\bar{x}) = l_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, m$$

Teorema 1.2. *El límite, si existe, es único.*

Teorema 1.3. *Sea $P(x_1, \ldots, x_n)$ un polinomio de n variables ($P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Entonces* $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} P(\bar{x}) = P(\bar{a})$

Teorema 1.4. *Sean $P(\bar{x}), Q(\bar{x})$ polinomios con $Q(\bar{a}) \neq 0$. Entonces*

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} \frac{P(\bar{x})}{Q(\bar{x})} = \frac{P(\bar{a})}{Q(\bar{a})}$$

Teorema 1.5. *(Teorema del Sandwich). Sean $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que $f(\bar{x}) \leq g(\bar{x}) \leq h(\bar{x})$ para todo $\bar{x} \in B(\bar{a}, r) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, siendo $B(\bar{a}, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : d(\bar{a}, \bar{x}) < r\}$. Si $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x}\to\bar{a}} h(\bar{x}) = l$, entonces* $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} g(\bar{x}) = l$

1.2. MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES

Método 1. Teorema del Sandwich (para funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$).
Método 2. Por sucesiones (para funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = l \Leftrightarrow \Big(\forall \text{ sucesión } \{\bar{x}_n\} \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = \bar{a}, \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_n) = l\Big)$$

Observación 1.1. *Supongamos que existen sucesiones $\{\bar{x}_n\}, \{\bar{y}_n\}$ que convergen a $\bar{a}$, ($\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = \lim_{n\to\infty} \bar{y}_n = \bar{a}$) y que $\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_n) = l$ y $\lim_{n\to\infty} f(\bar{y}_n) = l'$ siendo $l \neq l'$. Entonces no existe* $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})$.

Observación 1.2. *Si $lim_{n\to\infty}\bar{x}_n = \bar{a}$ y no existe el límite* $\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_n)$, *entonces tampoco existe el límite* $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})$.

Observación 1.3. *Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{a}$ *y* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$*, entonces, de existir,* $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = l$.

Método 3. Límite direccional (para funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). Si $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = l$, entonces, dado un camino determinado por una función $x_2 = \varphi(x_1)$ que pasa por $\bar{a}$ ($\varphi(a_1) = a_2$), se tiene que $\lim\limits_{\substack{\bar{x}\to\bar{a}\\ x_2=\varphi(x_1)}} f(\bar{x}) = l$.

Observación 1.4. *Si encontramos dos caminos* $x_2 = \varphi_1(x_1)$ *y* $x_2 = \varphi_2(x_1)$ *que pasan por* $\bar{a}$ *y tales que*

$$\lim_{\substack{\bar{x}\to\bar{a}\\ x_2=\varphi_1(x_1)}} f(\bar{x}) = l_1 \text{ y } \lim_{\substack{\bar{x}\to\bar{a}\\ x_2=\varphi_2(x_1)}} f(\bar{x}) = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$*, entonces no existe el límite* $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})$.

Método 4. Límites reiterados (para funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\bar{a} = (a_1, a_2)$. Si

$$\left.\begin{array}{lcl} \exists \lim_{x_1\to a_1}(\lim_{x_2\to a_2} f(x_1,x_2)) & = & l_1 \\ \exists \lim_{x_2\to a_2}(\lim_{x_1\to a_1} f(x_1,x_2)) & = & l_2 \\ \exists \lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(x_1,x_2) & = & l \end{array}\right\} \Rightarrow l_1 = l_2 = l$$

Observación 1.5. *a) Si existen* l_1 *y* l_2*, con* $l_1 \neq l_2$*, entonces no existe* l*.*
b) Si no existe l_1 *o no existe* l_2*, no se concluye nada.*
c) Si existen l_1 *y* l_2*, con* $l_1 = l_2$*, entonces, de existir* l*, es* $l = l_1 = l_2$*.*

Método 5. Límites en polares (para funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). Dados $\bar{x} = (x_1, x_2)$ y $\bar{a} = (a_1, a_2)$, el límite $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})$ se puede estudiar pasando a coordenadas polares, $x_1 = a_1 + r\cos\theta$ y $x_2 = a_2 + r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Entonces, $f(\bar{x}) = f(a_1 + r\cos\theta, a_2 + r\,\mathrm{sen}\,\theta) = F(r,\theta)$. Se tiene:

1. Si $\lim_{r\to 0} F(r,\theta)$ depende de θ, no existe el límite $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})$.
2. Si $\lim_{r\to 0} F(r,\theta)$ no depende de θ, no se concluye nada.
3. Si $0 \leq |F(r,\theta) - l| \leq h(r) \to 0$ cuando $r \to 0$, entonces $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = l$.

1.3. CONTINUIDAD

Definición 1.6. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$*. Entonces se dice que* f *es continua en* $\bar{a}$ *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $0 < d(\bar{x},\bar{a}) < \delta$*, entonces* $|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \epsilon$.

Observación 1.6. f *es continua en* $\bar{a}$ *si* $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$*. Esto supone que existe* $f(\bar{a})$ *(*$\bar{a} \in D(f)$*) y además existe el límite* $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})$ *y es igual a* $f(\bar{a})$*.*

Definición 1.7. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $f = (f_1, \ldots, f_m)$. *Se dice que* f *es continua en* $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ *si* f_i *es continua en* $\bar{a}$ *para todo* $i = 1, \ldots, m$.

Se dice que f *es continua en una región* $A \subset \mathbb{R}^n$ *si lo es en todo punto* $\bar{a} \in A$.

Propiedades. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuas en $\bar{a}$. Entonces

1. $(f+g)$ es continua en $\bar{a}$.
2. (fg) es continua en $\bar{a}$.
3. Si $g(\bar{a}) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en $\bar{a}$.

Teorema 1.6. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *continua en* $\bar{a}$ *y sea* $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *continua en* $f(\bar{a})$. *Entonces* $(g \circ f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *es continua en* $\bar{a}$.

Teorema 1.7. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. *Entonces* f *es continua en* $\bar{a}$ *si y sólo si para toda sucesión* $\{\bar{x}_n\}$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = \bar{a}$ *se verifica que* $\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_n) = f(\bar{a})$.

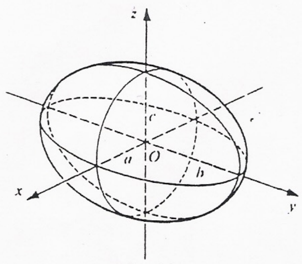
1.4. SUPERFICIES CUÁDRICAS

SUPERFICIES CUÁDRICAS

En general vienen dadas por ecuaciones de segundo grado de la forma:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Hx+Iy+Jz+K=0$$

Las más importantes son:

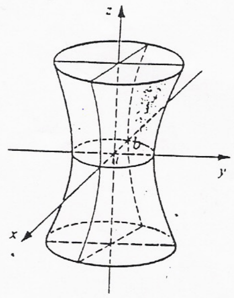


elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

para $z=0$ se obtiene la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



hiperboloide de una hoja

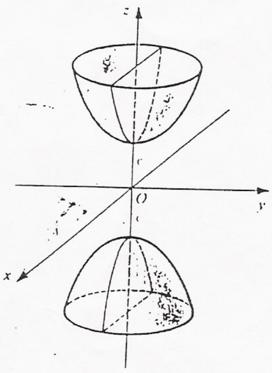
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

para $z=0$ se obtiene la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

para $y=0$ se obtiene la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

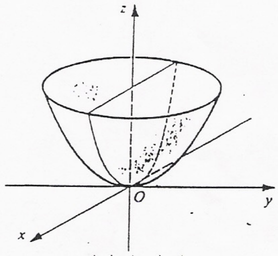


hiperboloide de dos hojas

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

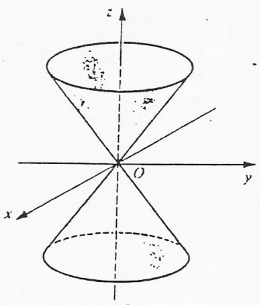
para $y=0$ se obtiene la hipérbola

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$



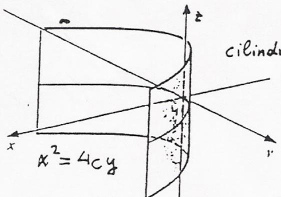
paraboloide elíptico

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$



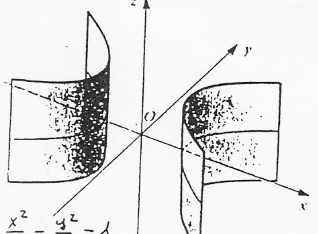
cono

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$



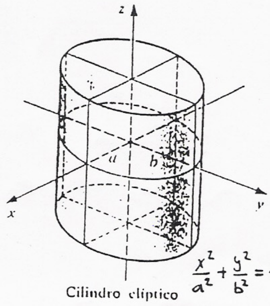
cilindro parabólico

$$x^2=4cy$$

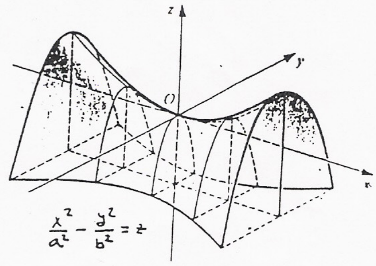


$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

cilindro hiperbólico



Cilindro elíptico $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

paraboloide hiperbólico