1. DIFERENCIABILIDAD EN VARIAS VARIABLES

1. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en el punto $\bar{a}$ y la dirección definida por $\bar{v}$.

1.1. $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2$, $\quad \bar{a} = (1,2)$, $\quad \bar{v} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
El vector $\bar{v} = (3/5, 4/5)$ es unitario. Entonces

$$D_{\bar{v}} f(\bar{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{a} + h\bar{v}) - f(\bar{a})}{h} =$$

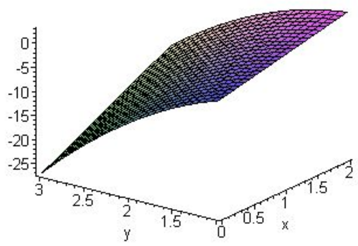
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(1 + h\frac{3}{5}, 2 + h\frac{4}{5}\right) - f(1,2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(1 + \frac{3h}{5} + 2\left(1 + \frac{3h}{5}\right)\left(2 + \frac{4h}{5}\right) - 3\left(2 + \frac{4h}{5}\right)^2 + 7\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(-24h^2/25 - 5h) = \lim_{h\to 0}(-24h/25 - 5) = -5$$

Si resolvemos aplicando el gradiente $\nabla f(x,y) = (1+2y, 2x-6y)$, tenemos

$$D_{\bar{v}} f(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a})\bar{v} = (5, -10)(3/5, 4/5) = -5$$



1.2. $f(x,y,z) = xyz$, $\quad \bar{a} = (1,0,1)$, $\quad \bar{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.
Tenemos $||\bar{v}|| = 1$, de modo que

$$D_{\bar{v}} f(\bar{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1 + h/\sqrt{2}, 0, 1 - h/\sqrt{2}) - f(1,0,1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((1 + h/\sqrt{2})0(1 - h/\sqrt{2}) - 0) = 0$$

Aplicando el gradiente $\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$, tenemos

$$D_{\bar{v}} f(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a})\bar{v} = (0,1,0)(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) = 0$$

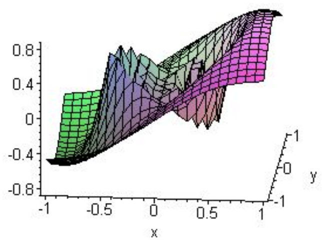
1.3. $f(x,y) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$, $\bar{a}=(0,0)$, $\bar{v}=(1,1)$.

Tenemos $||\bar{v}||=\sqrt{2}$, de modo que $\frac{\bar{v}}{||\bar{v}||}=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ es unitario. Entonces

$$D_{\bar{v}}f(\bar{a})=\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}))-f(0,0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\mathrm{sen}(1/h^2)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sen}(1/h^2)$$

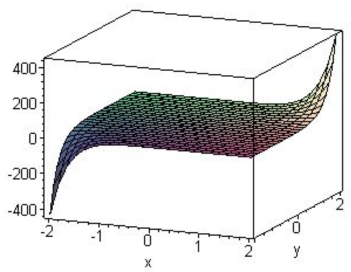
No existe ese límite, de manera que no existe la derivada direccional buscada en $\bar{a}=\bar{0}$.



1.4. $f(x,y)=x^2ye^{xy}$, $\bar{a}=(0,0)$, $\bar{v}=(1,1)$.

Tenemos $||\bar{v}||=\sqrt{2}$, de modo que $\frac{\bar{v}}{||\bar{v}||}=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ es unitario. Entonces

$$D_{\bar{v}}f(\bar{a})=\lim_{h\to 0}\frac{f(h/\sqrt{2},h/\sqrt{2})-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{2\sqrt{2}}e^{h^2/2}=0$$



2. Estudiar las derivadas direccionales de $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ en el origen.

Sea $\bar{v}=(v_1,v_2)$ unitario.

$$D_{\bar{v}}f(\bar{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\sqrt[3]{h^2 v_1 v_2}) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{v_1 v_2}{h}} = \begin{cases} \nexists & \text{si } v_1 \text{ y } v_2 \text{ son no nulos} \\ 0 & \text{si } v_1 \text{ ó } v_2 \text{ son nulos} \end{cases}$$

Las derivadas direccionales de f en $\bar{0}$ sólo existen en las direcciones de los ejes, y valen 0.

3. Demostrar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no es continua en $(0,0)$ y, sin embargo, existen todas las derivadas direccionales en el origen.

Probemos que f no es continua en $\bar{0}$. Aproximémonos a $\bar{0}$ por las sucesiones $\{(x_n, y_n)\} = \{(1/n, 0)\}$ y $\{(x'_n, y'_n)\} = \{(1/n^2, 1/n)\}$ obtenemos

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{1/n^2} = 0$$

$$\lim_{(x'_n,y'_n)\to(0,0)} \frac{x'_n {y'_n}^2}{{x'_n}^2 + {y'_n}^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^4}{2/n^4} = \frac{1}{2}$$

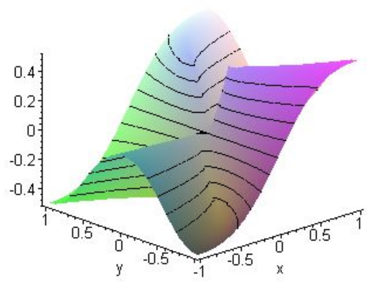
Como los límites no coinciden, la función no es continua en $\bar{0}$.

Estudiemos las derivadas direccionales en el origen. Sea $\bar{v} = (v_1, v_2)$ unitario. Entonces

$$D_{\bar{v}}f(\bar{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0) + h(v_1, v_2))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^4} = \begin{cases} v_2^2/v_1 & \text{si } v_1 \neq 0 \text{ y } v_2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } v_1 = 0 \text{ ó } v_2 = 0 \end{cases}$$

De modo que existen las derivadas direccionales de f en $\bar{0}$ en cualquier dirección.



4. Demostrar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$, pero la función derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$.

Estudiemos la diferenciabilidad de f en $\bar{a} = \bar{0}$.

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{f(\bar{a}+\bar{x}) - f(\bar{a}) - \nabla f(\bar{a})\bar{x}}{||\bar{x}||}$$

Tenemos $\bar{x} = (x,y)$ y $\bar{a} = (0,0)$, con lo que

$$f(\bar{a}+\bar{x}) = f(x,y) = (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \quad \text{y} \quad f(\bar{a}) = f(0,0) = 0$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

Entonces, $\nabla f(\bar{0}) = (0,0)$. Estamos en condiciones de calcular el límite

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{f(\bar{a}+\bar{x}) - f(\bar{a}) - \nabla f(\bar{a})\bar{x}}{||\bar{x}||} = \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{(x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$$

Al ser este límite igual a 0 y existir las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0})$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0})$, concluimos que f es diferenciable en $\bar{0}$.

Veamos ahora que la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $\bar{0}$. Se tiene

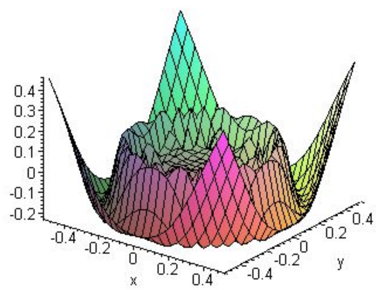
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Consideremos la sucesión $\{(x_n,y_n)\} = \{(1/n,0)\}$ y aproximémonos a $\bar{0}$ a través de ella.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{1/n^2}\right) - \frac{2}{1/n}\cos\left(\frac{1}{1/n^2}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\,\mathrm{sen}(n^2) - 2n\cos(n^2)\right)$$

Pero dicho límite no existe, de manera que $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $\bar{0}$.



5. Calcular las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

   5.1. $f(x,y) = x^2 + y^2\,\mathrm{sen}(xy)$

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y^3\cos(xy) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\,\mathrm{sen}(xy) + y^2x\cos(xy)$$

   5.2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
   Se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ para todo } (x,y) \neq (0,0)$$

Además,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{h-0}{h} = 1.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ para todo } (x,y) \neq (0,0)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \frac{h-0}{h} = 1.$$

5.3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^6 - x^2y^2}{(x^2+y^4)^2} \text{ para todo } (x,y) \neq (0,0)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^3y - 2xy^5}{(x^2+y^4)^2} \text{ para todo } (x,y) \neq (0,0).$$

Además,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

6. Calcular el gradiente de la función $z = f(x,y)$ definida implícitamente por

6.1. $x^2y - 2xyz - x - z - z^2 = 0.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2xy-2yz-1}{-2xy-1-2z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{x^2-2xz}{-2xy-1-2z}$$

En consecuencia,

$$\nabla z(x,y) = \left(\frac{2xy - 2yz - 1}{2xy + 1 + 2z}, \frac{x^2 - 2xz}{2xy + 1 + 2z} \right), \text{ con } z = z(x,y)$$

6.2. $xz^2 - y \operatorname{sen} z = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{z^2}{2xz - y\cos z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-\operatorname{sen} z}{2xz - y\cos z}$$

En consecuencia,

$$\nabla z(x,y) = \left(-\frac{z^2}{2xz - y\cos z}, \frac{\operatorname{sen} z}{2xz - y\cos z} \right) \text{ con } z = z(x,y)$$

7. Estudiar la continuidad y existencia de las derivadas parciales, en el origen, de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{y^2+x^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

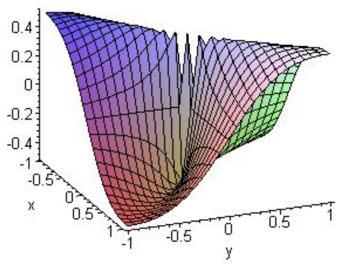
Estudiemos primero la continuidad. Escogemos la sucesión que converge a $\bar{0}$, $\{(x_n, y_n)\} = \{(1/n, 1/n)\}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{y_n^2 + x_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{2/n^2} = 1/2 \neq f(0,0) = 0$$

Como el límite no coincide con el valor de la función en $\bar{0}$, f no es continua en $\bar{0}$.

Estudiemos ahora la existencia de las derivadas parciales en $\bar{0}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$



8. Sean $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, $g(x,y) = e^{x-y^2}$ y $h = g \circ f$. Calcular $Df(1,1)$, $Dg(0,2)$ y $Dh(1,1)$.

   Calculemos $Df(1,1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. La matriz que caracteriza a la diferencial de f en $(1,1)$ es la matriz jacobiana $Jf(1,1)$. Tenemos

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

   Con lo que

$$Jf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   Calculemos $Dg(0,2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La matriz asociada es $Jg(0,2)$. Como

$$Jg(x,y) = \nabla g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \right) = \left(e^{x-y^2}, -2ye^{x-y^2} \right),$$

   resulta

$$Jg(0,2) = \left(e^{-4}, -4e^{-4} \right)$$

   Calculemos $Dh(1,1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Tenemos

$$h(x,y) = g(f(x,y)) = g(x^2 - y^2, 2xy) = e^{x^2 - y^2 - 4x^2y^2}$$

   La matriz asociada a $Dh(1,1)$ es $Jh(1,1)$. Como

$$Jh(x,y) = \nabla h(x,y) =$$

$$= \left((2x - 8xy^2)e^{x^2-y^2-4x^2y^2}, (-2y - 8yx^2)e^{x^2-y^2-4x^2y^2} \right),$$

   evaluando en $(1,1)$ queda $Jh(1,1) = \left(-6e^{-4}, -10e^{-4} \right)$

   Para calcular la matriz $Jh(1,1)$ también se puede aplicar la regla de la cadena, y se obtiene $Jh(1,1) = Jg(f(1,1))Jf(1,1)$. Compruébese que el resultado es el mismo.

9. Demostrar que si $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función polinomial en n variables, entonces P es diferenciable en todo $\mathbb{R}^n$.

   Basta con ver que existen y son continuas las derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial x_i}(\bar{x})$ para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y para todo $i = 1, \ldots, n$, pero esto es inmediato ya que, por ser P un polinomio, sus derivadas parciales también son polinomios y, por tanto, funciones continuas.

10. Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de las siguientes funciones:

10.1. $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$
Estudiemos primero la continuidad. Dado $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(x,y) = \sqrt{|a_1 a_2|} = f(\bar{a})$, de modo que f es continua en todo $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$.
Estudiemos la diferenciabilidad.
Comenzamos con el cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a})$. Dado $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$, si $\bar{a} = (a_1, a_2)$ es tal que $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a}) = \begin{cases} \frac{a_2}{2\sqrt{a_1 a_2}} & \text{si } a_1 a_2 > 0 \\ \frac{-a_2}{2\sqrt{a_1 a_2}} & \text{si } a_1 a_2 < 0 \end{cases}$$

En otro caso, esto es, $a_1 = 0$ ó $a_2 = 0$, calculando límites, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{a} + h(1,0)) - f(\bar{a})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|(a_1+h)a_2|} - \sqrt{|a_1 a_2|}}{h}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } a_2 = 0 \\ \lim_{h\to 0} \sqrt{|a_2|/h} \text{ (no existe)} & \text{si } a_1 = 0 \text{ y } a_2 \neq 0 \end{cases}$$

Estudiemos ahora $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{a})$.
Dado $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$, si $\bar{a} = (a_1, a_2)$ es tal que $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{a}) = \begin{cases} \frac{a_1}{2\sqrt{a_1 a_2}} & \text{si } a_1 a_2 > 0 \\ \frac{-a_1}{2\sqrt{a_1 a_2}} & \text{si } a_1 a_2 < 0 \end{cases}$$

En otro caso, esto es, $a_1 = 0$ ó $a_2 = 0$, calculando límites, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{a} + h(0,1)) - f(\bar{a})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|(a_2+h)a_1|} - \sqrt{|a_1 a_2|}}{h} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } a_1 = 0 \\ \lim_{h\to 0} \sqrt{|a_1|/h} \text{ (no existe)} & \text{si } a_1 \neq 0 \text{ y } a_2 = 0 \end{cases}$$

En consecuencia, como $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a})$ no existe en el eje OY, salvo en $\bar{a} = (0,0)$, y $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{a})$ tampoco existe en el eje OX, salvo en $\bar{a} = (0,0)$, tenemos que f no es diferenciable en los puntos $\bar{a}$ de los ejes salvo, quizá, en $(0,0)$. En caso de que $\bar{a}$ no esté en ninguno de los ejes ($a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$), entonces existen las derivadas parciales y son continuas, de modo que f es diferenciable en dichos puntos.

Sólo queda por analizar el caso $\bar{a} = (0,0)$. Aquí tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) = 0$$

de modo que las derivadas parciales existen en $\bar{a} = (0,0)$. Sólo queda comprobar si

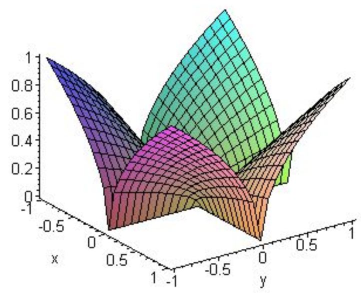
$$\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{f(\bar{0}+\bar{x}) - f(\bar{0}) - \nabla f(\bar{0})\bar{x}}{||\bar{x}||} = 0$$

Tenemos

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{f(\bar{0}+\bar{x}) - f(\bar{0}) - \nabla f(\bar{0})\bar{x}}{||\bar{x}||} = \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{\sqrt{xy} - 0 - (0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Pero dicho límite no existe, ya que basta aproximarse a $\bar{0}$ por las sucesiones $\{(1/n, 1/n)\}$ y $\{(1/n, 0)\}$ para observar que dan límites distintos. Concluimos, entonces, que f no es diferenciable en $\bar{a} = (0,0)$.



10.2. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Estudiemos primero la continuidad. Si $\bar{x} = (x,y) \neq (0,0)$ la función es claramente continua. Si $\bar{x} = (0,0)$, basta observar

$$0 \leq \left|(x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq x^2+y^2 \to 0 \text{ cuando } (x,y) \to (0,0)$$

Entonces $\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, de modo que la función es continua en $\bar{x} = \bar{0}$ también.

Estudiemos ahora la diferenciabilidad. Si $\bar{x} \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) y$$

Al existir y ser continuas las derivadas parciales, f es diferenciable en todo $\bar{x} \neq (0,0)$.
Falta por ver el caso $\bar{x} = (0,0)$. Se tiene

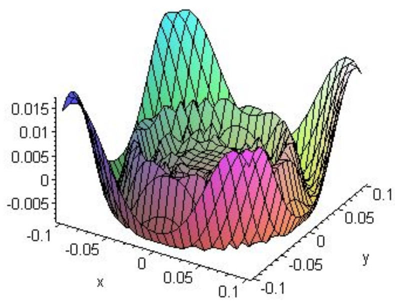
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \operatorname{sen}(1/h) = 0$$

Análogamente se obtiene $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Concluimos, entonces, que existen ambas derivadas parciales en $\bar{0}$. Además, tenemos que

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{f(\bar{0}+\bar{x}) - f(\bar{0}) - \nabla f(\bar{0})\bar{x}}{||\bar{x}||} = \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{(x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \sqrt{x^2+y^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

La última igualdad viene de observar que $\lim_{h\to 0} h \operatorname{sen}(1/h) = 0$.
En consecuencia, f es diferenciable en $(0,0)$.



10.3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Si $(x,y) \neq (0,0)$ la función es claramente continua. Además,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^4} - \frac{2x^2y^2}{(x^2+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^4} - \frac{4xy^5}{(x^2+y^4)^2},$$

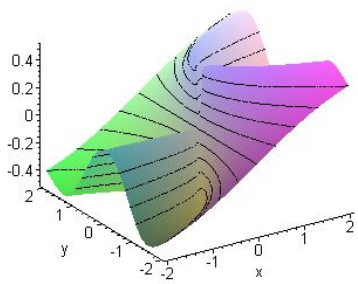
con lo que f también es diferenciable en todo $(x,y) \neq (0,0)$, al existir las derivadas parciales y ser continuas.

Si $(x,y) = (0,0)$, aproximándonos al punto por las sucesiones $\{(x_n,y_n)\} = \{(1/n^2,1/n)\}$ y $\{(x'_n,y'_n)\} = \{(1/n,0)\}$, obtenemos los límites

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{x_n y_n^2}{x_n^2+y_n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^4}{2/n^4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x'_n,y'_n)\to(0,0)} \frac{x'_n {y'_n}^2}{{x'_n}^2+{y'_n}^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{1/n^2} = 0$$

Esto quiere decir que f no es continua (ni diferenciable) en $(0,0)$.



10.4. $f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función es continua en todo $\bar{x} \neq \bar{0}$. Si $\bar{x} = \bar{0}$, como

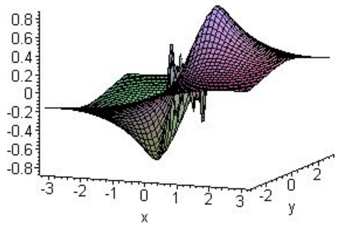
$$0 \leq \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} \right| \leq |x| \to 0 \text{ cuando } (x,y) \to (0,0),$$

tenemos que $lim_{\bar{x}\to\bar{0}} f(\bar{x}) = 0 = f(\bar{0})$, con lo que f es continua también en $\bar{0}$.

Estudiemos la diferenciabilidad. Si $(x,y) \neq (0,0)$, es fácil calcular las derivadas parciales, que resultan ser continuas (hágase), con lo que f es diferenciable. Si $(x,y) = (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h \operatorname{sen}(1/h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(1/h^2) \text{ (no existe)}$$

En consecuencia, f no es diferenciable en $(0,0)$.



10.5. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Estudiemos la continuidad. La función es claramente continua para todo $\bar{x} \neq \bar{0}$. Si $\bar{x} = \bar{0}$, como

$$0 \leq \left| \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq |y| \to 0 \text{ cuando } (x,y) \to (0,0)$$

se tiene que $\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} f(\bar{x}) = 0 = f(\bar{0})$, con lo que f es continua en $\bar{0}$.

Analicemos la diferenciabilidad. Dado (x,y) con $y \neq 0$, si derivamos f con respecto a x y con respecto a y, obtenemos que las derivadas parciales existen y son continuas, de modo que f es diferenciable en esos puntos (hágase).

Si $(x,y) = (x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,h) - f(x_0,0)}{h} = \frac{\frac{x_0|h|}{\sqrt{x_0^2+h^2}}}{h} = \pm 1 \text{ (no existe)}$$

La última igualdad viene de aproximarse h a 0 por el lado positivo o por el negativo. En consecuencia, f no es diferenciable en los puntos $(x,y) = (x_0,0)$, con $x_0 \neq 0$,

Si $(x,y) = (0,0)$, entonces

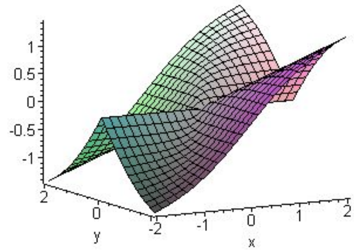
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Luego las derivadas parciales existen. Por otro lado,

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{f(\bar{0}+\bar{x}) - f(\bar{0}) - \nabla f(\bar{0})(\bar{x}}{||\bar{x}||} = \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{x|y|}{x^2+y^2} \text{ (no existe)}$$

Para comprobar que este límite no existe basta aproximarse a $\bar{0}$ por sucesiones adecuadas que den lugar a límites distintos (hágase). En consecuencia, f tampoco es diferenciable en $\bar{0}$.



10.6. $f(x,y) = (e^{x^2+y^2} - 1, x^2+y^2)$.
Veamos primero la continuidad. Para que f sea continua en un punto, deben serlo $f_1(x,y) = e^{x^2+y^2} - 1$ y $f_2(x,y) = x^2+y^2$. Resulta evidente que ambas funciones lo son para todo (x,y). Por otro lado, f es diferenciable en un punto si lo son f_1 y f_2. Como $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)$ existen y son continuas en todo punto (háganse los cálculos), se tiene que tanto f_1 como f_2 son diferenciables en todo punto, con lo que f también lo es.

11. Calcular el valor máximo de la derivada direccional de las siguientes funciones en el punto especificado:

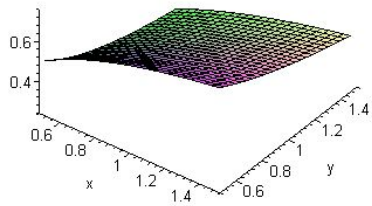
11.1. $f(x,y) = \frac{x}{x+y}$ $\qquad \bar{a} = (1,1)$
Debemos calcular el gradiente $\nabla f(x,y)$, que indica la dirección de máximo crecimiento de f, y determinar su módulo.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{(x+y)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x}{(x+y)^2}$$

De modo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1/4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1/4$$

Tenemos $\nabla f(1,1) = (1/4, -1/4)$. El valor máximo de las derivadas direccionales en $\bar{a} = (1,1)$ es $||\nabla f(1,1)|| = \sqrt{2/16} = \sqrt{2}/4$



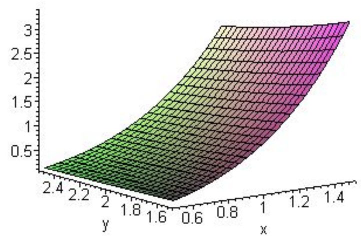
11.2. $f(x,y) = x^2 e^x \frac{1}{x+y}$ $\qquad \bar{a} = (1,2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xe^x + x^2e^x}{x+y} - \frac{x^2e^x}{(x+y)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^2e^x}{(x+y)^2}$$

De modo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{8e}{9} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -\frac{e}{9}$$

Tenemos $\nabla f(1,2) = (\frac{8e}{9}, -\frac{e}{9})$. El valor máximo de las derivadas direccionales en $\bar{a} = (1,2)$ es $||\nabla f(1,2)|| = \frac{e}{9}\sqrt{65}$



12. Calcular la ecuación de la recta normal y del plano tangente a las siguientes superficies en los puntos indicados.

12.1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $p = (3,4,25)$.
Tenemos $z = x^2+y^2$. Definimos la función $F(x,y,z) = x^2+y^2-z$ de modo que la superficie $\mathcal{S}$ se obtiene de la igualdad $F(x,y,z) = 0$ (superficie en forma implícita).

$$\nabla F(x,y,z) = (2x, 2y, -1) \text{ y } \nabla F(3,4,25) = (6,8,-1)$$

Este es un vector normal a la superficie $\mathcal{S}$ en el punto $p = (6,8,-1)$. La recta normal tiene por ecuación paramétrica

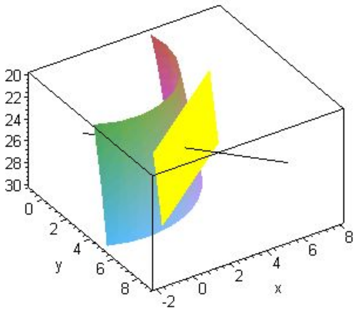
$$r \equiv \begin{cases} x &= 3 + 6\lambda \\ y &= 4 + 8\lambda \\ z &= 25 - \lambda \end{cases}$$

El plano tangente en p tiene por ecuación

$$\pi \equiv \{6(x-3) + 8(y-4) - (z-25) = 0\},$$

esto es,

$$\pi \equiv \{6x + 8y - z - 25 = 0\}$$



12.2. $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $p = (3, -4, 3/5)$.
Tenemos $z = f(x, y)$. Definimos la función $F(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - z$ de modo que la superficie $\mathcal{S}$ se obtiene de la igualdad $F(x, y, z) = 0$.

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, -1 \right)$$

y $\nabla F(3, -4, 3/5) = (16/125, 12/125, -1)$. Este es un vector normal a la superficie $\mathcal{S}$ en el punto $p = (3, -4, 3/5)$. Tomemos como vector director de la recta normal $\bar{v} = (16, 12, -125)$. La recta normal tiene por ecuación paramétrica

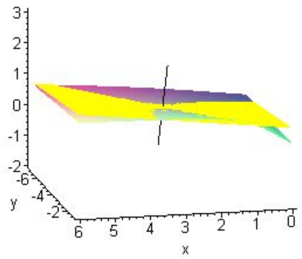
$$r \equiv \begin{cases} x &= 3 + 16\lambda \\ y &= -4 + 12\lambda \\ z &= 3/5 - 125\lambda \end{cases}$$

El plano tangente en p tiene por ecuación

$$\pi \equiv \{16(x-3) + 12(y+4) - 125(z - 3/5) = 0\}$$

esto es,

$$\pi \equiv \{16x + 12y - 125z + 75 = 0\}$$



12.3. $f(x, y) = \text{sen}(xy)$ en $p = (1, \pi, 0)$.
Tenemos $z = f(x, y)$. Definimos la función $F(x, y, z) = \text{sen}(xy) - z$, de modo que la superficie $\mathcal{S}$ se obtiene de la igualdad $F(x, y, z) = 0$.

$$\nabla F(x, y, z) = (y\cos(xy), x\cos(xy), -1)$$

$$\nabla F(1, \pi, 0) = (-\pi, -1, -1)$$

Éste último es un vector normal a la superficie $\mathcal{S}$ en el punto $p = (1, \pi, 0)$. La recta normal tiene por ecuación paramétrica

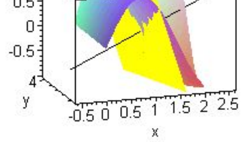
$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + \pi\lambda \\ y & = & \pi + \lambda \\ z & = & \lambda \end{array} \right.$$

El plano tangente en p tiene por ecuación

$$\pi \equiv \{\pi(x - 1) + (y - \pi) + z = 0\},$$

esto es,

$$\pi \equiv \{\pi x + y + z - 2\pi = 0\}$$



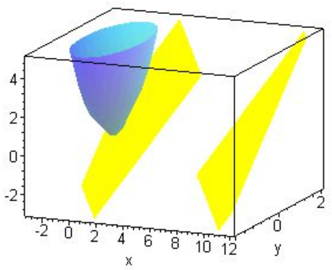
13. Hallar el plano tangente a la superficie $z = x^2 + 2y^2$, paralelo al plano $x + 2y - z = 10$.

Sea $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z = 0$. Un vector perpendicular al plano será $(1, 2, -1)$. Buscamos $p \in \mathcal{S} \equiv \{F(x, y, z) = 0\}$ tal que $\nabla F(p) = k(1, 2, -1)$. Tenemos

$$\nabla F(x, y, z) = (2x, 4y, -1)$$

Entonces, debe ocurrir $\{2x = k, 4y = 2k, -1 = -k\}$. De aquí se deduce que $k = 1, x = 1/2, y = 1/2$. Como $z = (1/2)^2 + 2(1/2)^2 = 3/4$, resulta que $p = (1/2, 1/2, 3/4)$.

El plano pedido es $\pi \equiv \{(x - 1/2) + 2(y - 1/2) - (z - 3/4) = 0\}$ o, de modo equivalente, $\pi \equiv \{x + 2y - z = 3/4\}$.



14. Hallar la recta tangente a la curva intersección de las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto $(1, 0, 1)$. Similarmente, para $xy + xz + yz = 3$ y $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ en el punto $(1, 1, 1)$.

Estudiemos primero la curva

$$\mathcal{C} \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & x^2 + y^2 \\ z & = & \sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right.$$

Sea $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ y $\mathcal{S}_1$ la superficie dada por $F_1(x, y, z) = 0$, esto es, $\mathcal{S}_1 \equiv \{x^2 + y^2 - z = 0\}$. Sea $F_2(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z$ y $\mathcal{S}_2$ la superficie dada por $F_2(x, y, z) = 0$, esto es, $\mathcal{S}_2 \equiv \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$. Entonces, los vectores normales a $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ en el punto $(1, 0, 1)$ vienen dados por

$$\nabla F_1(x, y, z) = (2x, 2y, -1) \text{ y } \nabla F_2(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$$

al ser evaluados en $(1, 0, 1)$, obteniéndose

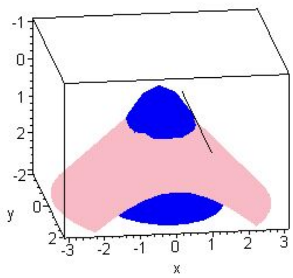
$$\nabla F_1(1, 0, 1) = (2, 0, -1) \text{ y } \nabla F_2(1, 0, 1) = (2, 0, -2)$$

Un vector director $\bar{v}$ de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en $(1,0,1)$ viene dado por el producto vectorial de $(2,0,-1)$ y $(1,0,-1)$ (éste último es proporcional a $(2,0,-2)$).

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,0)$$

La ecuación paramétrica de la recta será

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & \lambda \\ z & = & 1 \end{array} \right.$$



Si deseamos obtener también el plano normal π a $\mathcal{C}$ en el punto $(1,0,1)$, resulta

$$\pi \equiv \{0(x-1)+1(y-0)+0(z-1) = 0\} \text{ o, equivalentemente, } \pi \equiv \{y = 0\}$$

Analicemos ahora la curva

$$\mathcal{D} \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} xy + xz + yz & = & 3 \\ x^2 - y^2 + z^2 & = & 1 \end{array} \right.$$

Sea $G_1(x,y,z) = xy+xz+yz-3$ y $\mathcal{T}_1$ la superficie dada por $G_1(x,y,z) = 0$, esto es, $\mathcal{T}_1 \equiv \{xy+xz+yz-3 = 0\}$. Sea $G_2(x,y,z) = x^2-y^2+z^2-1$ y $\mathcal{T}_2$ la superficie dada por $G_2(x,y,z) = 0$, esto es, $\mathcal{T}_2 \equiv \{x^2-y^2+z^2-1 = 0\}$. Entonces los vectores normales a $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ en el punto $(1,1,1)$ vienen dados por

$$\nabla G_1(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y) \text{ y } \nabla G_2(x,y,z) = (2x, -2y, 2z)$$

al ser evaluados en $(1,1,1)$, obteniéndose los vectores

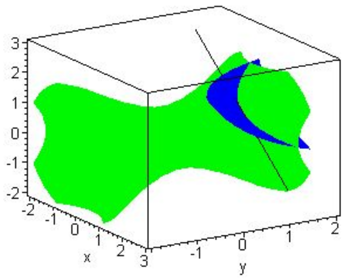
$$\nabla G_1(1,1,1) = (2,2,2) \text{ y } \nabla G_2(1,0,1) = (2,-2,2)$$

Escogemos los vectores $(1,1,1)$ y $(1,-1,1)$ (proporcionales a los conseguidos con los gradientes). Un vector director $\bar{v}$ de la recta tangente a $\mathcal{D}$ en el punto $(1,1,1)$ viene dado por el producto vectorial de $(1,1,1)$ y $(1,-1,1)$.

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,-1)$$

La ecuación paramétrica de la recta será

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1+\lambda \\ y & = & 1 \\ z & = & 1-\lambda \end{array} \right.$$



Si deseamos obtener también el plano normal π a $\mathcal{D}$ en el punto $(1,1,1)$, resulta

$$\pi \equiv \{(x-1)+0(y-1)-(z-1) = 0\} \text{ o, equivalentemente, } \pi \equiv \{x-z = 0\}$$

15. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies $z = x^2 - y^2$, $z = 3$ en el punto $P = (2,1,3)$

Tenemos la curva

$$\mathcal{C} \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} z & = & x^2 - y^2 \\ z & = & 3 \end{array} \right.$$

obtenida como intersección de las superficies

$$\mathcal{S}_1 \equiv \{x^2 + y^2 - z = 0\} \qquad \mathcal{S}_2 \equiv \{z - 3 = 0\}$$

Consideramos las funciones $F_1(x,y,z) = x^2 - y^2 - z$ y $F_2(x,y,z) = z - 3$ y sus gradientes

$$\nabla F_1(x,y,z) = (2x, -2y, -1) \text{ y } \nabla F_2(x,y,z) = (0,0,1)$$

que, al ser evaluados en $(2,1,3)$, nos dan los vectores

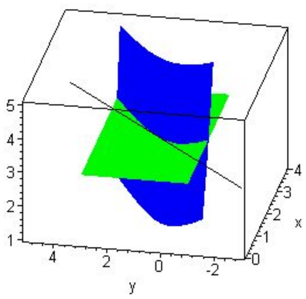
$$\nabla F_1(2,1,3) = (4,-2,-1) \text{ y } \nabla F_2(2,1,3) = (0,0,1)$$

Un vector director $\bar{v}$ de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto $(2,1,3)$ viene dado por el producto vectorial de $(4,-2,-1)$ y $(0,0,1)$.

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-4,0)$$

Escogemos como vector director $\bar{v} = (1,2,0)$. La ecuación paramétrica de la recta será

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 + \lambda \\ y & = & 1 + 2\lambda \\ z & = & 3 \end{array} \right.$$



16. Se han medido dos variables, x e y, obteniendo los valores $x = 2$ e $y = 3$. En dichas medidas pueden existir errores máximos de $0,1$ y $0,2$ respectivamente. Hallar, aplicando la regla de los incrementos finitos, la cota del error absoluto cometido en la medida de la magnitud $z = x/y$.

    Tenemos $F(x,y) = \frac{x}{y}$. Calculemos los valores máximos que alcanzan $\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right|$ y $\left|\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right|$ para $(x,y) \in D = [2 - 0'1, 2 + 0'1] \times [3 - 0'2, 3 + 0'2]$.

    Como

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} \text{ y } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{-x}{y^2},$$

se tiene que

$$\max_{(x,y)\in D}\left\{\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right|\right\} = \frac{1}{2,8} \quad \text{y} \quad \max_{(x,y)\in D}\left\{\left|\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right|\right\} = \frac{2,1}{(2,8)^2}$$

Entonces,

$$\text{Error absoluto} \leq 0,1\frac{1}{2,8} + 0,2\frac{2,1}{(2,8)^2} = 0,0892$$

17. Calcular, aproximadamente, el valor de la expresión $\sqrt{(2,01)^3 + (1,01)^3}$ mediante la diferencial de la función adecuada.
Sea $z = f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$. Se tiene

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}dx + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}dy$$

Resulta

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\Delta y = \frac{12}{6}(0,01) + \frac{3}{6}(0,01) = 0,025$$

Obtenemos el siguiente valor aproximado:

$$\sqrt{(2,01)^3 + (1,01)^3} = f(2'01, 1'01) = f(2,1) + \Delta z \simeq \sqrt{2^3+1} + 0,025 = 3,025$$

18. El volumen de un cono circular recto de radio r y altura h es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Calcular de forma aproximada el error cometido al calcular el volumen si las mediciones del radio y la altura son 2 y 5 respectivamente, con un posible error de 1/8.
Tenemos $V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ con $r = 2 \pm 1/8$ y $h = 5 \pm 1/8$.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh = \frac{2\pi r h}{3}dr + \frac{\pi r^2}{3}dh$$

Resulta

$$\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial r}(2,5)\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}(2,5)\Delta h = \frac{20\pi}{24} + \frac{4\pi}{24} = 3,142$$

19. Estudiar la existencia de máximos y mínimos locales de las siguientes funciones:

19.1. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$
Calculemos los puntos críticos. Se tiene

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 9y, 3y^2 - 9x) = (0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 & = & 3y \\ y^2 & = & 3x \end{array} \right. \Rightarrow (x,y) = \left\{ \begin{array}{l} (0,0) \\ \text{ ó} \\ (3,3) \end{array} \right.$$

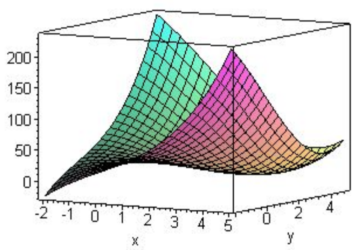
Por otro lado,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}$$

de modo que, evaluando en los puntos críticos,

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } H_f(3,3) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$$

Resulta $|H_f(0,0)| = -81 < 0$, con lo que f tiene en $(0,0)$ un punto de ensilladura. Por otro lado, $|H_f(3,3)| = 243 > 0$ y $A = 18 > 0$, de modo que f alcanza en $(3,3)$ un mínimo local.



19.2. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$
Calculemos los puntos críticos.

$$\nabla f(x,y,z) = (2x + yz, 2y + xz, 2z + xy) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + yz & = & 0 \\ 2y + xz & = & 0 \\ 2z + xy & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} yz & = & -2x \\ xz & = & -2y \\ xy & = & -2z \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} y/x & = & x/y \\ z/y & = & y/z \\ z/x & = & x/z \end{array} \right. \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2$$

Entonces,

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2z^2 = 4x^2 \\ x^2z^2 = 4y^2 \\ x^2y^2 = 4z^2 \\ x^2 = y^2 = z^2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = \{(0,0,0), (-2,-2,-2), (-2,2,2), (2,-2,2), (2,2,-2)\}$$

Por otro lado,

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & z & y \\ z & 2 & x \\ y & x & 2 \end{pmatrix}$$

Tenemos el polinomio característico

$$|H_f(x,y,z) - \lambda Id| =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + (-12 + x^2 + y^2 + z^2)\lambda + (8 + 2xyz - 2y^2 - 2x^2 - 2z^2) = 0$$

Evaluando en $(0,0,0)$, queda

$$\{-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

La forma cuadrática es definida positiva, con lo que f alcanza en $(0,0,0)$ un mínimo local.
Evaluando en $(-2,-2,-2)$, $(-2,2,2)$, $(2,-2,2)$ ó $(2,2,-2)$, queda

$$\{-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = 0\} \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 4$$

La forma cuadrática es indefinida y f tiene cuatro puntos de ensilladura.

19.3. $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
Calculemos los puntos críticos. Se tiene

$$\nabla f(x,y) = (y - \frac{1}{x^2}, x - \frac{1}{y^2}) = (0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & 1/x^2 \\ x & = & 1/y^2 \end{array} \right. \Rightarrow (x, y) = (1, 1)$$

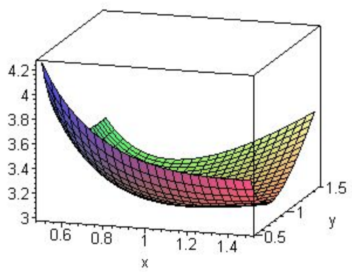
Por otro lado,

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2/x^3 & 1 \\ 1 & 2/y^3 \end{pmatrix}$$

de modo que, evaluando en el punto crítico,

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resulta $|H_f(1, 1)| = 3 > 0$ y $A = 2 > 0$, con lo que f alcanza en $(1, 1)$ un mínimo local.



19.4. $f(x, y, z) = -2x^2 - y^2 - 3z^2 + 2xy + 2yz + 1$
Calculemos los puntos críticos.

$$\nabla f(x, y, z) = (-4x + 2y, -2y + 2x + 2z, -6z + 2y) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} -2x + y & = & 0 \\ x - y + z & = & 0 \\ y - 3z & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Por otro lado,

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Tenemos el polinomio característico

$$|H_f(x, y, z) - \lambda Id| =$$

$$= -\lambda^3 - 12\lambda^2 - 36\lambda - 8 = 0$$

Se prueba que todos los autovalores son negativos (por ejemplo, con el empleo de la sucesión secular, o estudiando la gráfica del polinomio característico), obteniéndose que la forma cuadrática es definida negativa y, por tanto, f alcanza en $(0,0,0)$ un máximo local.

19.5. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$
Calculemos los puntos críticos.

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 - 4y + 4x) = (0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - x & = & -y \\ y^3 - y & = & -x \end{array} \right. \Rightarrow x^3 - x = -x - y^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = -y^3 \Rightarrow (x,y) = \{(0,0) \text{ ó } (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ ó } (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$$

Por otro lado,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

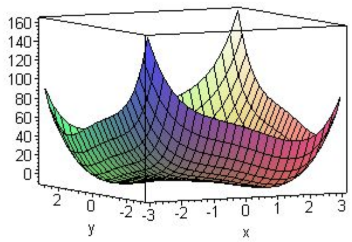
de modo que, evaluando en los puntos críticos,

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

En los puntos $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ se cumple $|H_f| > 0$ con $A > 0$, de modo que f alcanza en ellos dos mínimos locales.

En el punto $(0,0)$ se tiene $|H_f(0,0)| = 0$, por lo que no sabemos qué ocurre. Analicemos la situación con más detalle. Sabemos que $f(0,0) = 0$. Si nos aproximamos a $(0,0)$ por la sucesión $\{(0, 1/n)\}$, al aplicar f obtenemos $f(0, 1/n) = 1/n^4 - 2/n^2 = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n^2} - 2\right) < 0 = f(0,0)$ para n suficientemente grande. Si nos aproximamos a $(0,0)$ por la sucesión $\{(1/n, 1/n)\}$, al aplicar f obtenemos $f(1/n, 1/n) = 2/n^4 > 0 = f(0,0)$. En consecuencia, f tiene en $(0,0)$ un punto de silla.



19.6. $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$
Calculemos los puntos críticos.

$$\nabla f(x,y) = (-2x(y-2x^2)+(y-x^2)(-4x),(y-2x^2)+(y-x^2)) =$$

$$= (0,0) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 8x^3 - 6xy & = & 0 \\ 2y - 3x^2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Sustituyendo $y = \frac{3}{2}x^2$ en la ecuación $8x^3 - 6xy = 0$, obtenemos $x = 0$, de modo que el único punto crítico es $(0,0)$.
Por otro lado, desarrollando la expresión del gradiente, tenemos $\nabla f(x,y) = (8x^3 - 6xy, 2y - 3x^2)$. La matriz hessiana es

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 6y & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix}$$

de modo que, evaluando en el punto crítico,

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $|H_f(0,0)| = 0$, no tenemos información suficiente. Veamos la situación con más detalle. Aproximémonos al punto crítico por las recta $x = 0$ y por la parábola $y = \frac{3}{2}x^2$.
En el primer caso, al aplicar f a los puntos de la recta, obtenemos

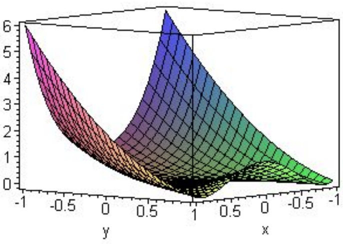
$$f(x,y) = f(0,y) = y^2 > 0 = f(0,0)$$

a lo largo de la recta (con $y \neq 0$). En el segundo caso, al aplicar f a los puntos de la parábola, se tiene

$$f(x,y) = f\left(x, \frac{3}{2}x^2\right) = \left(\frac{3}{2}x^2 - x^2\right)\left(\frac{3}{2}x^2 - 2x^2\right) =$$

$$= -x^4/4 < 0 = f(0,0)$$

para todo punto de la parábola (con $x \neq 0$). En consecuencia, hemos probado que f tiene en $(0,0)$ un punto de ensilladura.



20. Calcular el valor máximo de

$$f(x,y) = 4xy, \quad x > 0,\, y > 0$$

sujeta a la ligadura $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

El problema se puede reenunciar como la obtención del rectángulo de mayor área posible contenido en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Tenemos la ligadura $\{g(x,y) = 0\}$ con $g(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1$. Además,

$$\nabla f(x,y) = (4y, 4x), \quad \lambda \nabla g(x,y) = (2\lambda x/9, \lambda y/8)$$

Igualando términos y añadiendo la ecuación de la ligadura, obtenemos el sistema

$$\{4y = \frac{2}{9}\lambda x,\, 4x = \frac{1}{8}\lambda y,\, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1\}$$

Despejando λ de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, queda

$$4x = \frac{1}{8}\left(\frac{18y}{x}\right) \Rightarrow x^2 = \frac{9}{16}y^2$$

Sustituyendo este valor de x^2 en la tercera ecuación, vemos que

$$\frac{1}{9}\left(\frac{9}{16}y^2\right) + \frac{1}{16}y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$$

Como exigimos $y > 0$, nos quedamos con $y = 2\sqrt{2}$. Por la misma razón, nos quedamos con $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Como $f(3/\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = 24$, éste es el valor máximo de $f(x, y)$ sometida a la ligadura $g(x, y) = 0$, y se alcanza en el punto $(x, y) = (3/\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.