1. CONTINUIDAD EN VARIAS VARIABLES

1. Calcular el dominio de las siguientes funciones reales de varias variables reales:

   1.1 $f(x,y) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{y-2x}$
   Debe ocurrir $y \neq 2x$ para evitar que el denominador se anule y $9 - x^2 \geq 0$ para que la raíz no sea negativa. El dominio de la función es

   $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-3,3],\ y \neq 2x\}$$

   1.2 $f(x,y) = (\sqrt{x-y}, \ln(x-2), \frac{1}{x-y})$
   Debe ocurrir: $\{x - y \geq 0,\ x - 2 > 0,\ x - y \neq 0\}$. Esto equivale a pedir $\{x > y,\ x > 2\}$. El dominio es

   $$D = \{(x,y) : x > y,\ x > 2\}$$

   1.3 $f(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2-4}, \ln(16-x^2-y^2), \ln(x)+\ln(y))$
   Debe ocurrir: $\{x^2+y^2-4 \geq 0,\ 16-x^2-y^2 > 0,\ x > 0,\ y > 0\}$. Esto equivale a $\{4 \leq x^2+y^2 < 16,\ x > 0,\ y > 0\}$. El dominio es

   $$D = \{(x,y) : 2 \leq \sqrt{x^2+y^2} < 4,\ x > 0,\ y > 0\}$$

2. Calcular

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2, (x^2+y)\operatorname{sen}(xy), x^2+yx)$$

   Tenemos
   $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0,$
   $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y)\operatorname{sen}(xy) = 0,$
   $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+yx = 0.$
   En consecuencia, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2, (x^2+y)\operatorname{sen}(xy), x^2+yx) = (0,0,0)$

3. Calcular los siguientes límites en el caso de que existan:
   3.1. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{3-x+y}{4+x-2y}$

   $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{3-x+y}{4+x-2y} = 4$$

   3.2. $\lim_{(x,y)\to(4,\pi)} x^2 \operatorname{sen} \frac{y}{x}$

$$\lim_{(x,y)\to(4,\pi)} x^2 \operatorname{sen}\frac{y}{x} = 16 \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 8\sqrt{2}$$

3.3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-2y}{2x-3y}$

La función $f(x,y) = \frac{3x-2y}{2x-3y}$ no está definida en $(x,y) = (0,0)$ (se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$). Veamos si existe dicho límite. Si nos aproximamos por rectas $y = kx$ al punto $\bar{0} = (0,0)$, tenemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{3x-2y}{2x-3y} = \lim_{x\to 0} \frac{3x-2kx}{2x-3kx} = \frac{3-2k}{2-3k}$$

Como el límite depende de k, resulta que según nos acerquemos por una recta u otra el valor será distinto, de modo que no existe el límite buscado.

3.4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-y}{x^2+y^2}$

La función $\frac{2x-y}{x^2+y^2}$ no está definida en $\bar{0}$. Aproximándonos por rectas $y = kx$, obtenemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{2x-y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-kx}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2-k}{x(1+k^2)}$$

Si $k = 0$, el límite es $\pm\infty$, dependiendo del lado de la recta $y = 0$ por el que nos aproximemos a $\bar{0}$. De modo que el límite no existe.

3.5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$

Intentemos ver qué ocurre al aproximarnos por sucesiones al punto $\bar{0}$. Consideremos las sucesiones

$$\{(x_n, y_n)\} = \{(\frac{1}{n}, 0)\} \to (0,0) \text{ cuando } n \to \infty$$

$$\{(x'_n, y'_n)\} = \{(0, \frac{1}{n})\} \to (0,0) \text{ cuando } n \to \infty$$

Aproximándonos por la primera sucesión, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_n + y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n} = 1$$

Si nos aproximamos por la segunda sucesión, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x'_n}{x'_n + y'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{1/n} = 0$$

Como los límites no coinciden, no existe el límite de la función en $\bar{0}$.

3.6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)$

Pasando a coordenadas polares, tenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = \lim_{\rho\to 0} \rho^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta\ln(\rho^2)$$

Además,

$$0 \leq |\rho^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta\ln(\rho^2)| \leq \rho^4\ln(\rho^2) \to 0 \text{ cuando } \rho\to 0$$

Para probar que $\rho^4\ln(\rho^2)\to 0$ cuando $\rho\to 0$, se aplica la regla de L'Hôpital. Por la regla del Sandwich, $\lim_{\rho\to 0}\rho^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta\ln(\rho^2)=0$, lo cual equivale a que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)=0$.

3.7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

$$0 \leq \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y| \to 0 \text{ cuando } (x,y)\to(0,0)$$

Por la regla del Sandwich, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

3.8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

Pasando a polares,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}{\rho^3} = \lim_{\rho\to 0}\rho\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta$$

Como

$$0 \leq |\rho\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta| \leq \rho \to 0 \text{ cuando } \rho\to 0,$$

resulta $\lim_{\rho\to 0}\rho\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta=0$, con lo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

3.9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

Aproximándonos por rectas $y=kx$, obtenemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{1}{1+k^2}$$

Como depende de k, no existe el límite.

3.10. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Se tiene

$$0 \leq \left| \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y| \leq |y| \to 0 \text{ cuando } (x,y) \to (0,0)$$

Por la regla del Sandwich, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

3.11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4}$

Aproximémonos por parábolas $x = ky^2$ al punto $\bar{0}$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=ky^2}} \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{(y^2-ky^2)^2}{k^2y^4+y^4} = \frac{(1-k)^2}{k^2+1}$$

Como la expresión depende de k, el límite no existe.

También se puede intentar resolver aproximándonos por sucesiones a $\bar{0}$ (por ejemplo $\{(1/n^2, 1/n)\}$ y $\{(1/n, 0)\}$).

Obsérvese que, en este caso, si nos aproximamos por rectas $y = kx$, los límites siempre son los mismos (valen 1) pero, sin embargo, el límite de la función en $\bar{0}$ no existe.

3.12. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^2}$

Pasando a polares,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho^2}(\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta - \rho\cos\theta)^2 =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho^2}(\rho^4 \operatorname{sen}^4\theta - 2\rho^3 \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \rho^2\cos^2\theta) =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}(\rho^2 \operatorname{sen}^4\theta - 2\rho \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \cos^2\theta) = \cos^2\theta$$

De modo que no existe el límite ya que, dependiendo del ángulo θ por el que nos aproximemos a $\bar{0}$, obtendremos resultados distintos.

Otro modo de resolver el ejercicio es aproximándose por sucesiones adecuadas.

3.13. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x} \operatorname{sen}(\frac{1}{x^2+y^2})$

Consideremos la sucesión

$$\{(x_n, y_n)\} = \{(1/n, 1/n)\} \to (0,0) \text{ cuando } n \to \infty$$

Entonces,

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{y_n}{x_n} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n^2 + y_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n^2/2)$$

de modo que no existe límite al aproximarnos a $\bar{0}$ por esta sucesión. Por tanto, la función no tiene límite en $\bar{0}$.

3.14. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Aproximémonos por la recta $y = x$. Se tiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x-x)}{\sqrt{2x^2}} = 0$$

Aproximándonos por la recta $y = 0$, queda

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

La última igualdad se obtiene aplicando la regla de L'Hôpital. Se concluye que el límite no existe.

3.15. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2}$

Como

$$0 \le \left| \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} xz \right| \le |xz| \to 0 \text{ cuando } (x,y,z) \to (0,0,0),$$

aplicando la regla del Sandwich, $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2} = 0$.

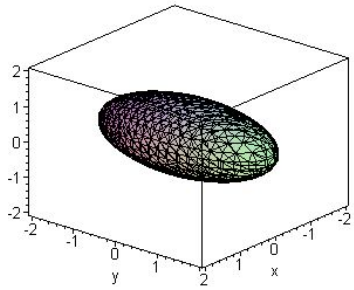
4. Representar gráficamente las superficies de nivel de las siguientes funciones:

4.1. $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2$

Se tiene $f(\bar{x}) \ge 0$. Hacemos $f(\bar{x}) = k^2$, lo que equivale a escribir

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = k^2 \Rightarrow \frac{x^2}{k^2/4} + \frac{y^2}{k^2} + \frac{z^2}{k^2/4} = 1$$

Si $k^2 > 0$, entonces tenemos elipsoides de centro $\bar{0}$ y semiejes $k/2, k, k/2$.



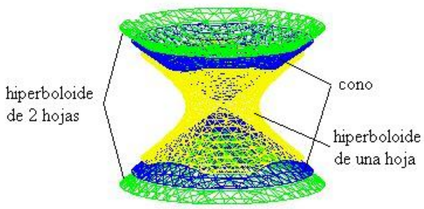
Si $k^2 = 0$, tenemos $x = y = z = 0$, que es el punto $\bar{0}$.

4.2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

Si $k > 0$, $\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k} - \frac{z^2}{k} = 1$. Hiperboloide de una hoja con $a = b = c = \sqrt{k}$.

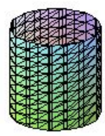
Si $k < 0$, $\frac{x^2}{-k} + \frac{y^2}{-k} - \frac{z^2}{-k} = -1$. Hiperboloide de 2 hojas con $a = b = c = \sqrt{-k}$.

Si $k = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ lo que nos da un cono.



4.3. $f(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2$

Al igualar a constante, se tiene $(x-a)^2+(y-b)^2 = k^2$ que es la ecuación de un cilindro de sección circular de radio k y centro (a, b). Para el caso en que $k = 0$, el cilindro degenera en la recta $r \equiv \{x = a, y = b\}$ paralela al eje OZ .



5. Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

5.1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función es claramente continua para todo $(x,y) \neq (0,0)$ al ser en estos puntos un cociente de dos polinomios donde el denominador no se anula. Únicamente queda estudiar la continuidad en $(x,y) = (0,0)$. La función será continua en $\bar{0} = (0,0)$ si existe el límite de la función cuando nos aproximamos a $\bar{0}$ y dicho límite vale $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.

Aproximémonos a $(0,0)$ por la sucesión $\{(x_n, y_n)\} = \{(1/n, 1/n)\}$.

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)^2(1/n)^2}{(1/n)^2(1/n)^2 + (1/n - 1/n)^2} =$$

$$= 1 \neq f(0,0) = 0$$

De modo que la función no es continua en $\bar{0}$.

5.2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función es continua para todo $(x,y) \neq (0,0)$ al ser en estos puntos un cociente de dos polinomios donde el denominador no se anula. Únicamente queda estudiar la continuidad en $(x,y) = (0,0)$.

Aproximémonos a $\bar{0}$ por la sucesión $\{(x_n, y_n)\} = \{(1/n, 0)\}$. Entonces

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)^2}{(1/n)^2} = 1 \neq f(0,0) = 0$$

La función no es continua en $\bar{0}$.

5.3. $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \cos(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función es claramente continua en todo $(x,y) \neq (0,0)$. Veamos qué ocurre en $(x,y) = (0,0)$.

Obsérvese que

$$0 \leq \left|(x+y)^2 \cos(\frac{1}{x^2+y^2})\right| \leq (x+y)^2 \to 0 \text{ cuando } (x,y) \to (0,0)$$

Por la regla del Sandwich, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)^2 \cos(\frac{1}{x^2+y^2}) = 0 = f(0,0)$, con lo que f es continua también en $\bar{0}$.

5.4. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Es análogo al ejercicio 5.3. La función es continua en todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

5.5. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función es continua en todo $(x,y) \neq (0,0)$. Estudiemos lo que ocurre en $\bar{0}$ aproximándonos por la sucesión $\{(x_n,y_n)\} = \{(1/n,1/n)\}$.

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2/n^2}{2/n^2} = 1 \neq f(0,0) = 0$$

La función no es continua en $\bar{0}$.

5.6. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$

La función es continua en todo (x,y) que no pertenezca a la recta $r \equiv \{x+y=0\}$. Estudiemos lo que ocurre en los puntos de esta recta. Sea $(x_0,y_0) \in r$, esto es, $y_0 = -x_0$. Veamos si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) = 0$.

Consideremos la sucesión

$$(\{x_n,y_n)\} = \{(x_0+1/n, y_0)\} =$$

$$= \{(x_0+1/n, -x_0)\} \to (x_0,y_0) = (x_0,-x_0) \text{ cuando } n \to \infty$$

Entonces

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(x_0,-x_0)} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0+1/n}{1/n} = \begin{cases} \infty & \text{si } x_0 > 0 \\ 1 & \text{si } x_0 = 0 \\ -\infty & \text{si } x_0 < 0 \end{cases}$$

De aquí se deduce que $\lim_{(x_n,y_n)\to(x_0,-x_0)} f(x_n,y_n) \neq f(x_0,-x_0) = 0$, de modo que f no es continua en ningún punto $(x_0,-x_0) \in r$.

5.7. $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{y}) & \text{si } y \neq 0 \\ x^2 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

La función es continua en todo (x,y) que no pertenezca a la recta $r \equiv \{y=0\}$. Veamos qué ocurre con los puntos de la recta. Sea $(x_0,0) \in r$. Nos aproximaremos a este punto mediante la sucesión $\{(x_n,y_n)\} = \{(x_0,1/n)\}$. Entonces

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(x_0,0)} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} x_0^2 \operatorname{sen}(n) = \begin{cases} \text{No existe} & \text{si } x_0 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x_0 = 0 \end{cases}$$

Es claro que f no es continua en $(x_0, 0)$ cuando $x_0 \neq 0$. Por otro lado,

$$0 \leq |f(x,y)| \leq x^2 \to 0 \text{ cuando } (x,y) \to (0,0)$$

Por la regla del Sandwich, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, con lo que f es continua en $(0,0)$.

5.8. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función es continua en todo $(x,y) \neq (0,0)$. Veamos qué ocurre en $\bar{0}$.

$$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq |y| \to 0 \text{ cuando } (x,y) \to (0,0)$$

Por la regla del Sandwich, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)$, de manera que f es continua en $\bar{0}$.

5.9. $f(x,y) = \begin{cases} (\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \operatorname{sen} xy) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sean las funciones coordenadas de f,

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen} xy & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para que f sea continua en un punto (x,y), deben serlo tanto f_1 como f_2.

Es claro que, para todo $(x,y) \neq (0,0)$, tanto f_1 como f_2 son continuas. Veamos qué ocurre en $(x,y) = (0,0)$.

Por el problema 3.7, la función f_1 es continua en $\bar{0}$. Además,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}(xy) = 0 = f_2(0,0)$$

con lo que f_2 también es continua en $\bar{0}$. Hemos probado que f es continua en $\bar{0}$.