1. EJERCICIOS

1. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en el punto $\bar{a}$ y la dirección definida por $\bar{v}$.

   1.1. $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2$, $\quad \bar{a} = (1,2)$, $\quad \bar{v} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

   1.2. $f(x,y,z) = xyz$, $\quad \bar{a} = (1,0,1)$, $\quad \bar{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

   1.3. $f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
   $\bar{a} = (0,0)$, $\bar{v} = (1,1)$.

   1.4. $f(x,y) = x^2 y e^{xy}$, $\quad \bar{a} = (0,0)$, $\quad \bar{v} = (1,1)$.

2. Estudiar las derivadas direccionales de $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ en el origen.

3. Demostrar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   no es continua en $(0,0)$ y, sin embargo, existen todas las derivadas direccionales en el origen.

4. Demostrar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen}(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   es diferenciable en $(0,0)$, pero la función derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$.

5. Calcular las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

   5.1. $f(x,y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(xy)$

   5.2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

   5.3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

6. Calcular el gradiente de la función $z = f(x,y)$ definida implícitamente por

   6.1. $x^2 y - 2xyz - x - z - z^2 = 0$.

   6.2. $xz^2 - y \operatorname{sen} z = 0$.

7. Estudiar la continuidad y existencia de las derivadas parciales, en el origen, de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{y^2+x^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

8. Sean $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, $g(x,y) = e^{x-y^2}$ y $h = g \circ f$. Calcular $Df(1,1)$, $Dg(0,2)$ y $Dh(1,1)$.

9. Demostrar que si $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función polinomial en n variables, entonces P es diferenciable en todo $\mathbb{R}^n$.

10. Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de las siguientes funciones:

    10.1. $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

    10.2. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    10.3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    10.4. $f(x,y) = \begin{cases} x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    10.5. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    10.6. $f(x,y) = (e^{x^2+y^2} - 1, x^2+y^2)$.

11. Calcular el valor máximo de la derivada direccional de las siguientes funciones en el punto especificado:

    11.1. $f(x,y) = \frac{x}{x+y}$ $\quad \bar{a} = (1,1)$

    11.2. $f(x,y) = x^2 e^x \frac{1}{x+y}$ $\quad \bar{a} = (1,2)$

12. Calcular la ecuación de la recta normal y del plano tangente a las siguientes superficies en los puntos indicados.

    12.1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $p = (3,4,25)$.

    12.2. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $p = (3,-4,3/5)$.

    12.3. $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ en $p = (1,\pi,0)$.

13. Hallar el plano tangente a la superficie $z = x^2 + 2y^2$, paralelo al plano $x + 2y - z = 10$.

14. Hallar la recta tangente a la curva intersección de las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto $(1, 0, 1)$. Similarmente, para $xy + xz + yz = 3$ y $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ en el punto $(1, 1, 1)$.

15. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies $z = x^2 - y^2$, $z = 3$ en el punto $P = (2, 1, 3)$

16. Se han medido dos variables x e y obteniendo los valores $x = 2$ e $y = 3$. En dichas medidas pueden existir errores máximos de $0,1$ y $0,2$ respectivamente. Hallar, aplicando la regla de los incrementos finitos, la cota del error absoluto cometido en la medida de la magnitud $z = x/y$.

17. Calcular aproximadamente el valor de la expresión $\sqrt{(2,01)^3 + (1,01)^3}$ mediante la diferencial de la función adecuada.

18. El volumen de un cono circular recto de radio r y altura h es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Calcular de forma aproximada el error cometido al calcular el volumen si las mediciones del radio y la altura son 2 y 5 respectivamente, con un posible error de $1/8$.

19. Estudiar la existencia de máximos y mínimos locales de las siguientes funciones:

    19.1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$
    19.2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$
    19.3. $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
    19.4. $f(x, y, z) = -2x^2 - y^2 - 3z^2 + 2xy + 2yz + 1$
    19.5. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$
    19.6. $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$

20. Calcular el valor máximo de

$$f(x, y) = 4xy, \quad x > 0,\, y > 0$$

sujeta a la ligadura $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.