# 1. INTEGRALES MÚLTIPLES

**1.** Calcular las siguientes integrales iteradas:

1. $\displaystyle\int_0^3\int_1^2 x^2y\,dy\,dx = \int_0^3 \frac{3x^2}{2}\,dx = \frac{27}{2}$
2. $\displaystyle\int_1^2\int_0^3 x^2y\,dx\,dy = \int_1^2 \frac{x^3y}{3} = \frac{27}{2}$
3. $\displaystyle\int_1^3\int_0^1 (1+4xy)\,dx\,dy = 10$
4. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{sen}\,y\,dy\,dx = 2$
5. $\displaystyle\int_1^4\int_0^2 (x+\sqrt{y})\,dx\,dy = 46/3$
6. $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 (2x+y)^8\,dx\,dy = \frac{261632}{45}$
7. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^1 (x^4y+y^2)\,dy\,dx = \frac{13}{15}$
8. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 xye^{x+y}\,dy\,dx = 1$
9. $\displaystyle\int_{-1}^0\int_1^2 (-x\ln y)\,dy\,dx = \ln(2) - \frac{1}{2}$
10. $\displaystyle\int_1^4\int_1^2 \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)dy\,dx = \frac{21}{2}\ln(2)$
11. $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\int_0^{\ln 5} e^{2x-y}\,dx\,dy = 6$
12. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,dy\,dx = \sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}$

**2.** Calcular las siguientes integrales dobles:

1. $\int\int_R (6x^2y^3 - 5y^4)\,dA, \quad R = [0,3]\times[0,1]$  Solución: $\frac{21}{2}$
2. $\int\int_R \cos(x+2y)\,dA, \quad R = [0,\pi]\times[0,\pi/2]$  Solución: $-2$
3. $\int\int_R xye^{x^2y}\,dA, \quad R = [0,1]\times[0,2]$  Solución: $\frac{e^2-3}{2}$
4. $\int\int_R \frac{x}{1+xy}\,dA, \quad R = [0,1]\times[0,1]$  Solución: $2\ln(2)-1$
5. $\int\int_R x^y\,dA, \quad R = [0,1]\times[0,1]$  Solución: $\ln(2)$

**3.** Hallar el volumen del sólido acotado por el rectángulo $R = [0,1]\times[-2,3]$ y el plano $3x+2y+z=12$.

Dado que $z = 12-3x-2y > 0$ para todo $(x,y)\in R$, basta calcular la integral

$$\int\int_R (12-3x-2y)\,dA = \frac{95}{2}$$

**4.** Calcular $\int\int_D (x^2-y)\,dA$ siendo $D$ la región comprendida entre las gráficas de las curvas $y=x^2$, $y=-x^2$ y las rectas $x=-2$ y $x=2$.

Se tiene

$$\int\int_D (x^2-y)\,dA = \int_{-2}^{2}\int_{-x^2}^{x^2}(x^2-y)\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\left[x^2y-y^2/2\right]_{-x^2}^{x^2}\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} 2x^4\,dx = [2x^5/5]_{-2}^{2} = 128/5$$

**5.** Determinar $\int\int_D xy\,dA$ siendo $D$ la región del primer cuadrante encerrada entre las parábolas $3y^2=x$ e $y=x^2$.

Calculemos la intersección de las dos gráficas.

$$y=\sqrt{x/3}=x^2 \Rightarrow x/3=x^4 \Rightarrow x(3x^3-1)=0$$

De modo que la intersección se da en $x=0, y=0$ y en $x=3^{-1/3}, y=3^{-2/3}$.

Entonces,

$$\int\int_D xy\,dA = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}\int_{x^2}^{\sqrt{x/3}} xy\,dy\,dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^5}{2}\right)dx = \frac{1}{108}$$

**6.** Evaluar $\int\int_D xy\,dA$ con $D$ la región acotada por la recta $y=x-2$ y la parábola $y^2=2x+4$.

Calculemos la intersección de ambas curvas

$$x=y+2=\frac{y^2-4}{2} \Rightarrow y^2-2y-8=0 \Rightarrow y=4, y=-2$$

La intersección se da en $x=6, y=4$ y en $x=0, y=-2$.

La región encerrada por $D$ es de tipo 2 ya que, despejando $x$ en función de $y$, se tiene $h_1(y)=\frac{y^2-4}{2}$ y $h_2(y)=y+2$ con

$$D=\{(x,y): h_1(y)\le x\le h_2(y),\ -2\le y\le 4\}$$

Entonces

$$\int\int_D xy\,dA = \int_{-2}^{4}\int_{\frac{y^2-4}{2}}^{y+2} xy\,dx\,dy = 54$$

**7.** Determinar el volumen del sólido comprendido entre el paraboloide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ y el rectángulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

Dado que $z = 1 - x^2/4 - y^2/9 > 0$ para todo $(x, y) \in R$, el volumen pedido es

$$V = \int\int_R (1 - x^2/4 - y^2/9)\, dA = \int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} (1 - x^2/4 - y^2/9)\, dx\, dy = \frac{166}{27}$$

**8.** Calcular $\int\int_R x^2 y\, dA$ siendo $R$ la región plana contenida en el cuadrado unidad $I = [0, 1] \times [0, 1]$ y acotada por las curvas $y = x^2$ e $y = x^4$. Hágase el cálculo variando el orden de integración.

Se tiene

$$\int\int_R x^2 y\, dA = \int_0^1 \int_{x^4}^{x^2} x^2 y\, dy\, dx = \frac{2}{77}$$

Al variar el orden de integración, se obtiene

$$\int\int_R x^2 y\, dA = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} x^2 y\, dx\, dy = \frac{2}{77}$$

**9.** Hallar el área del recinto $E$ acotado por una elipse de semiejes $a$ y $b$.

La ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. El área pedida es cuatro veces el área del recinto

$$F = \left\{(x, y) : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right\}$$

Calculemos el área de $F$:

$$A(F) = \int\int_F dx\, dy = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\, dx = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 t\, dt = \frac{\pi ab}{4}$$

La penúltima igualdad se obtiene al realizar el cambio $x = a \operatorname{sen} t$. En consecuencia, el área pedida es $\pi ab$.

**10.** Hallar el área del sector comprendido entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 2x$ y $x^2 + y^2 = 4x$ y las rectas $y = x$ e $y = 0$.

La circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$ se puede escribir como $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 4x$ se puede escribir como $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Se tienen dos circunferencias centradas en $(1,0)$ y $(2,0)$ respectivamente, y de radios 1 y 2. La región $A$ cuya área debemos calcular es el sector encajado entre las dos circunferencias y acotado por las dos rectas (hágase un dibujo). Debemos obtener $\int\int_A 1\, dx\, dy$. Para ello, hacemos un cambio a coordenadas polares $T(r,\theta) = (x,y)$, obteniendo

$$\text{área}(A) = \int\int_{A'} r\, dr\, d\theta$$

donde $A'$ es la región, en coordenadas polares, tal que $T(A') = A$.

Si se pasa $x^2 + y^2 = 2x$ a polares, queda la expresión $r^2 = 2r\cos\theta$, esto es, $r = 2\cos\theta$. Por otro lado, la circunferencia $x^2+y^2 = 4x$ queda expresada como $r^2 = 4r\cos\theta$, esto es, $r = 4\cos\theta$. La recta $y = 0$ es $\theta = 0$ en polares, mientras que $y = x$ es $\theta = \pi/4$. En definitiva,

$$A' = \{(r,\theta) : \theta \in [0,\pi/4],\, r \in [2\cos\theta, 4\cos\theta]\}.$$

Por consiguiente,

$$\text{área}(A) = \int\int_{A'} r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/4}\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4} 6\cos^2\theta\, d\theta = \left[3\theta + 3\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{3\pi+6}{4}$$

**11.** La temperatura media de una placa situada en la región $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 25\}$ es $T_M = \frac{\int\int_D T(x,y)\, dA}{A(D)}$, con $T(x,y)$ la temperatura en grados centígrados correspondiente al punto $(x,y)$ de la placa y $A(D)$ el área de la placa. Se supone que la temperatura es proporcional a su distancia al origen. Sabiendo que $T(1,0) = 100$, hallar la temperatura media de la placa.

La temperatura $T(x,y)$ es $T(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$. Teniendo en cuenta que $T(1,0) = 100$, resulta $k = 100$. Por consiguiente, la temperatura media es

$$T_M = \frac{\int\int_D 100\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy}{25\pi}$$

siendo $25\pi = \text{área}(D)$. Si pasamos a polares,

$$\int\int_D 100\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^5 100r^2\, dr\, d\theta = \frac{25000\pi}{3}$$

La temperatura media es, por tanto,

$$T_M = \frac{25000\pi/3}{25\pi} = \frac{25000}{75} = \frac{1000}{3} = 333{,}3^{\circ}C.$$

**12.** Evaluar $\int\int_R (3x+4y^2)\,dA$ con $R$ la región del semiplano superior acotada por los círculos $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$.

Pasando a coordenadas polares, el recinto $R$ se transforma en el recinto $R'=[1,2]\times[0,\pi]$. Debemos calcular la integral

$$\int\int_R 3x+4y^2\,dx\,dy=\int\int_{R'}(3r\cos\theta+4r^2\operatorname{sen}^2\theta)r\,dr\,d\theta=$$

$$=\int_0^\pi\int_1^2(3r^2\cos\theta+4r^3\operatorname{sen}^2\theta)\,dr\,d\theta=\int_0^\pi\left[r^3\cos\theta+r^4\operatorname{sen}^2\theta\right]_1^2\,d\theta=$$

$$=\int_0^\pi 7\cos\theta+15\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta=\frac{15\pi}{2}$$

**13.** Calcular el volumen del sólido acotado por el plano $z=0$ y el paraboloide $z=1-x^2-y^2$.

La intersección del plano con el paraboloide es la circunferencia $x^2+y^2=1$ contenida en el plano $z=0$. El volumen pedido es

$$V=\int\int_D 1-x^2-y^2\,dx\,dy$$

siendo $D$ el disco $D=\{(x,y,0):x^2+y^2\leq 1\}$. Pasando a coordenadas polares, se obtiene

$$V=\int\int_D 1-x^2-y^2\,dx\,dy=\int\int_{D'}(1-r)r\,dr\,d\theta$$

siendo $D'=[0,1]\times[0,2\pi]$ el transformado del recinto $D$ en coordenadas polares.

Por tanto,

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r-r^2\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{3}$$

**14.** Calcular el volumen del sólido que se encuentra bajo el paraboloide $z=x^2+y^2$, sobre el plano $z=0$, y dentro del cilindro $x^2+y^2=2x$.

El cilindro se puede escribir como $(x-1)^2+y^2=1$. Es, por tanto, perpendicular al plano $z=0$ y se corta con él en una circunferencia centrada en $(1,0,0)$ y de radio 1. Se deja al lector representar gráficamente la región sólida pedida.

Se desea obtener el volumen $V=\int\int_D x^2+y^2\,dx\,dy$ siendo $D$ el disco $D=\{(x,y,0):(x-1)^2+y^2\leq 1\}$. Pasando coordenadas polares,

$$V=\int\int_{D'} r^3\,dr\,d\theta$$

con $D' = \{(r,\theta) : \theta \in [-\pi/2, \pi/2],\ 0 \le r \le 2\cos\theta\}$.

Por tanto,

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^3 \, dr \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4\theta \, d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

**15.** Calcular las integrales

$$\int\int\int_B xyz^2 \, dV \text{ y } \int\int\int_C (xz - y^3) \, dV$$

con $B = [0,1] \times [-1,2] \times [0,3]$ y $C = [-1,1] \times [0,2] \times [0,1]$.

$$\int\int\int_B xyz^2 \, dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2} \, dy \, dz = \int_0^3 \frac{3z^2}{4}, dz = \frac{27}{4}$$

Por otro lado,

$$\int\int\int_C (xz - y^3) \, dV = \int_0^1 \int_0^2 \int_{-1}^1 xz - y^3 \, dx \, dy \, dz =$$

$$\int_0^1 \int_0^2 -2y^3 \, dy \, dz = \int_0^1 -8 \, dz = -8$$

**16.** Calcular la integral $\int\int\int_B z \, dV$ con $B$ el tetraedro sólido acotado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.

La región $B$ es

$$B = \{(x,y,z) : x \in [0,1], 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\}$$

$$\int\int\int_B z dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y} dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{-(1-x-y)^3}{6}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} \, dx = \left[\frac{-(1-x)^4}{24}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

**17.** Evaluar $\int\int\int_B \sqrt{x^2 + z^2} \, dV$ con $B$ la región sólida acotada por el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y el plano $y = 4$.

La integral pedida toma el mismo valor que $I = \int\int\int_{B_1} \sqrt{x^2+y^2}\, dV$, siendo $B_1$ la región sólida acotada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$. Calculemos $I$. Si pasamos a coordenadas cilíndricas,

$$I = \int\int\int_{B_2} r^2\, dz\, d\theta\, dr$$

con $B_2 = \{(r, \theta, z) : r \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, r^2]\}$. De modo que

$$I = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} r^2 dz\, d\theta\, dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^4 d\theta\, dr = \int_0^2 2\pi r^4\, dr = \frac{2^6\pi}{5}$$

**18.** Utilícese una integral triple para calcular el volumen de:

- El sólido acotado por la superficie $y = x^2$ y los planos $z = 0$, $z = 4$ e $y = 9$.
- La región sólida acotada por el cilindro $x^2+y^2 = 9$ y los planos $y+z = 5$ y $z = 1$.

Llamemos $B$ a la primera región. Buscamos $V = \int\int\int_B dV$. Se tiene que

$$B = \{(x, y, z) : x \in [-3, 3], z \in [0, 4], y \in [x^2, 9], \},$$

de modo que

$$V = \int_0^4 \int_{-3}^3 \int_{x^2}^9 dy\, dx\, dz = \int_0^4 \int_{-3}^3 9 - x^2\, dx\, dz = \int_0^4 36\, dz = 144$$

Llamemos $C$ a la segunda región. Buscamos $V = \int\int\int_C dV$. Pasando a coordenadas cilíndricas, si denotamos por $C_1$ a la región transformada de $C$, resulta

$$C_1 = \{(r, \theta, z) : r \in [0, 3], \theta \in [0, 2\pi], z \in [1, 5 - r \operatorname{sen} \theta]\},$$

de modo que

$$V = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_1^{5-r\operatorname{sen}\theta} r\, dz\, d\theta\, dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} 4r - r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, dr =$$

$$= \int_0^3 8\pi r\, dr = 36\pi$$

**19.** Evaluar, utilizando coordenadas cilíndricas, la integral

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$$

La región sólida, escrita en coordenadas cilíndricas, es

$$B = \{r, \theta, z) : r \in [0,2], \theta \in [0, 2\pi], z \in [r, 2]\}$$

La integral resulta ser

$$I = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_r^2 r^3\,dz\,d\theta\,dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} 2r^3 - r^4\,d\theta\,dr =$$

$$= \int_0^2 2\pi(2r^3 - r^4)\,dr = \frac{16\pi}{5}$$

**20.** Hallar, utilizando coordenadas cilíndricas, el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$.

Las superficies son dos paraboloides elípticos, el primero con vértice el origen de coordenadas y apuntando hacia el eje $Z$ positivo y el segundo con vértice el punto $(0, 0, 2)$ y apuntando hacia el eje $Z$ negativo.

Estudiemos un punto $(x, y, z)$ que esté en la intersección de las dos superficies. Se tiene que $x^2 + y^2 = 1$. Como, además, $z = x^2 + y^2$, resulta $z = 1$. Pasando a coordenadas esféricas, la región encerrada entre los paraboloides es

$$B = \{(r, \theta, z) : r \in [0,1], \theta \in [0, 2\pi], z \in [r^2, 2 - r^2]\}$$

El volumen buscado es

$$\int\int\int_B r dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{2-r^2} r\,dz\,d\theta\,dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r - 2r^3\,d\theta\,dr =$$

$$= \int_0^1 4\pi r - 4\pi r^3\,dr = \pi$$

**21.** Evaluar, utilizando coordenadas esféricas:

- $\int\int\int_B \left(e^{x^2+y^2+z^2}\right)^{3/2} dV$, siendo $B \subset \mathbb{R}^3$ la bola unidad.
- $\int\int\int_B xyz\,dV$, siendo $B \subset \mathbb{R}^3$ la región comprendida entre las esferas $\rho = 2$ y $\rho = 4$ y sobre el cono $\phi = \pi/3$.
- El volumen de la región sólida dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, sobre el plano $z = 0$ y bajo el cono $z^2 = x^2 + y^2$.

Sea $I_1 = \int\int\int_B \left(e^{x^2+y^2+z^2}\right)^{3/2} dV$ la primera de las integrales. Pasando a coordenadas esféricas,

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2e^{\rho^3} \rho^2 \, d\theta \, d\rho =$$

$$= \int_0^1 4e^{\rho^3} \rho^2 \pi \, d\rho = \frac{4\pi}{3}(e-1)$$

Sea $I_2 = \int\int\int_B xyz \, dV$ la segunda de las integrales. Pasando a coordenadas esféricas,

$$I_2 = \int_0^{\pi/3} \int_0^{2\pi} \int_2^4 (\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta)(\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta)(\rho\cos\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi =$$

$$= \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^3\phi \cos\phi \, d\phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\phi \cos\phi \, d\theta \int_2^4 \rho^5 \, d\rho =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4\phi\right]_0^{\pi/3} \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{6}\rho^6\right]_2^4 = 0$$

Para determinar el volumen del último apartado, basta calcular la integral $I = \int\int\int_B dV$ siendo $B$ la región especificada. Si se expresa en coordenadas esféricas, se obtiene otra región

$$B_1 = \{(\rho, \theta, \phi) : \rho \in [0,2], \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [\pi/4, \pi/2]\}$$

El volumen pedido es

$$V = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 d\rho =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2\pi)\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$$