1. INTEGRALES MÚLTIPLES

1.1. INTEGRAL DOBLE SOBRE UN RECTÁNGULO

Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función acotada de dos variables, definida sobre el rectángulo

$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

A continuación se considera una partición de R en subrectángulos. Para ello se realizan dos particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ de $[a,b]$ y $[c,d]$ respectivamente, con

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\equiv \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\} \\ \mathcal{Q} &\equiv \{y_0 = c < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = d\} \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} x_i - x_{i-1} &= \frac{b-a}{n} = \Delta x \text{ para todo } i = 1, \ldots, n \\ y_j - y_{j-1} &= \frac{d-c}{n} = \Delta y \text{ para todo } j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Denotamos por $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ los subrectángulos de la partición de R. Cada rectángulo tiene área $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

Si suponemos $f \geq 0$ en R, llamamos S al sólido cuya tapa superior es la gráfica de f y cuya tapa inferior es el rectángulo R. Eligiendo un punto $r_{ij} \in R_{ij}$ para el que f alcanza un mínimo en R_{ij}, entonces $f(r_{ij})\Delta A$ representa el volumen de una caja rectangular de base R_{ij} y altura $f(r_{ij})$, siendo la suma

$$s_n = \sum_{i,j=0}^{n-1} f(r_{ij}) \Delta A$$

igual al volumen de un sólido inscrito en S.

De igual manera, si $s_{ij} \in R_{ij}$ es un punto para el que f alcanza un máximo en R_{ij}, la suma

$$S_n = \sum_{i,j=0}^{n-1} f(s_{ij}) \Delta A$$

es igual al volumen de un sólido circunscrito en S.

Si llamamos V al volumen del sólido S, es claro que $s_n \leq V \leq S_n$.

Definición 1.1. *Si existen y son iguales los límites* $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = V$, *entonces se dice que* f *es integrable en* R, *y se escribe*

$$V = \int\int_R f(x,y)\, dA = \int\int_R f(x,y)\, dx\, dy$$

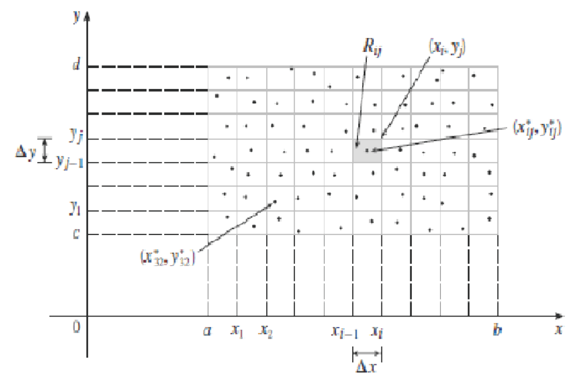
Obsérvese que para que tome sentido esta construcción, no es necesario $f \geq 0$. *Si* f *toma valores negativos, la integral se interpreta como un volumen con signo.*

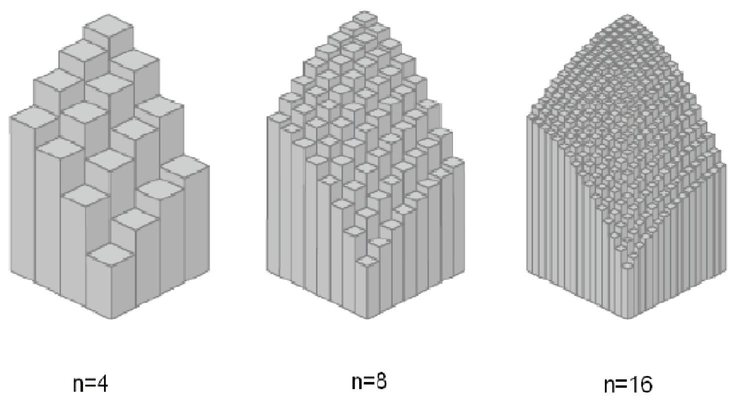
Observación 1.1. *La integrabilidad se puede reescribir como la existencia del límite*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=0}^{n-1} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

para cualquier $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$.

A la suma $\sum_{i,j=0}^{n-1} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$ *se la llama* suma de Riemann *para* f.





Teorema 1.1. *Toda función continua $f : R \to \mathbb{R}$ definida sobre un rectángulo R es integrable. De hecho, basta con que f sea acotada y que el conjunto de puntos donde es discontinua esté formado por una unión finita de gráficas de funciones continuas.*

1.1.1. Propiedades de las integrales dobles

1. $\int\int_R (f+g)\, dA = \int\int_R f\, dA + \int\int_R g\, dA$
2. $\int\int_R kf\, dA = k\int\int_R f\, dA$
3. Si $f \geq g$, entonces $\int\int_R f\, dA \geq \int\int_R g\, dA$
4. $\left|\int\int_R f\, dA\right| \leq \int\int_R |f|\, dA$

Teorema 1.2. *(Fubini) Si f es continua en el rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$, entonces f es integrable en R y*

$$\int\int_R f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy$$

De hecho, si f es acotada y sus discontinuidades forman una unión finita de gráficas de funciones continuas cumpliéndose que $\int_c^d f(x,y)dy$ existe para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int\int_R f(x,y)dA$$

Corolario 1.1. *Si $f(x,y) = g(x)h(y)$ es continua en R, entonces*

$$\int\int_R g(x)h(y)\, dA = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d h(y)\, dy$$

1.2. INTEGRAL DOBLE EN REGIONES ELEMENTALES

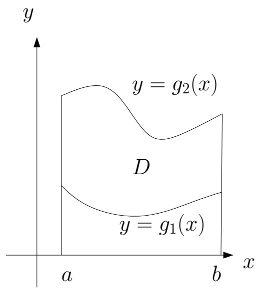
Definición 1.2. *Una región del plano D se dice que es de* tipo 1 *si se encuentra encerrada entre las gráficas de dos funciones continuas $g_1(x)$ y $g_2(x)$, esto es,*

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

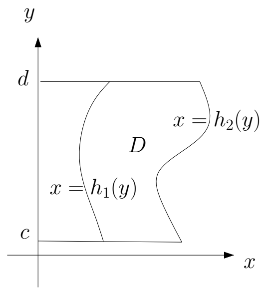
Se dice que D es de tipo 2 *si se encuentra encerrada entre las gráficas de dos funciones continuas $h_1(y)$ y $h_2(y)$, esto es,*

$$D = \{(x,y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

A estas regiones las llamaremos regiones elementales.



tipo 1



tipo 2

Definición 1.3. *(Integral sobre una región elemental)*

Dada una región elemental D y una función $f : D \to \mathbb{R}$ continua, se define la integral de f sobre D, $\int\int_D f(x,y)\,dA$, del siguiente modo:

Se considera un rectángulo R, con $D \subset R$, y se define la siguiente función $F : R \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si\ (x,y) \in D \\ 0 & si\ (x,y) \notin D \end{cases}$$

Entonces

$$\int\int_D f(x,y)\,dA = \int\int_R F(x,y)\,dA$$

Observación 1.2. *Resulta inmediato ver que la definición es consistente y no depende del rectángulo R elegido. También resulta evidente que, si $f \geq 0$, entonces $\int\int_D f(x,y)\,dA$ representa el volumen encerrado entre la gráfica de f y la región D.*

Teorema 1.3. *Si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua en una región D de tipo 1, entonces*

$$\int\int_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Si la región D es de tipo 2, entonces

$$\int\int_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Observación 1.3. *El área de una región elemental D se obtiene calculando $\int\int_D dA$, esto es, con $f = 1$.*

1.2.1. Propiedades

1. $\int\int_D (f+g)\,dA = \int\int_D f\,dA + \int\int_D g\,dA$.
2. $\int\int_D kf\,dA = k\int\int_D f\,dA$.

3. Si $f \geq g$, entonces $\int\int_D f\,dA \geq \int\int_D g\,dA$.

4. $\int\int_D 1\,dA = A(D)$ siendo $A(D)$ el área de D.

5. Si $m \leq f(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in D$, entonces

$$mA(D) \leq \int\int_D f(x,y)\,dA \leq MA(D)$$

6. Si $D = D_1 \cup D_2$ sin que D_1 y D_2 se solapen salvo, quizá, en los bordes, entonces $\int\int_D f\,dA = \int\int_{D_1} f\,dA + \int\int_{D_2} f\,dA$.

Teorema 1.4. *(Teorema del valor medio integral para integrales dobles)*
Sea $f : D \to \mathbb{R}$ continua con D una región elemental. Entonces existe un punto $(x_0, y_0) \in D$ tal que

$$\int\int_D f(x,y)\,dA = f(x_0,y_0)A(D)$$

Teorema 1.5. *(Áreas de superficies)*
Dada una superficie S de ecuación $z = f(x,y)$ con $(x,y) \in D$, una región elemental, y tal que f_x y f_y son continuas, entonces el área de S, $A(S)$, es

$$A(S) = \int\int_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\,dA$$

1.3. CAMBIO DE VARIABLE EN INTEGRALES DOBLES

Sea T una transformación desde el plano uv en el plano xy, $T(u,v) = (x,y)$, donde $x = x(u,v)$ y $y = y(u,v)$ son funciones con derivadas parciales continuas. Bajo estas condiciones, se dice que T es C^1.

Definición 1.4. *El* jacobiano *de T, una transformación C^1, es el determinante*

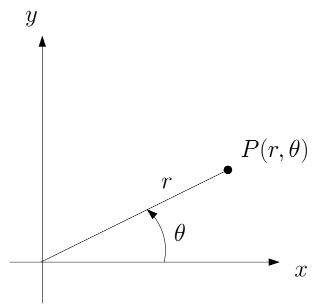
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Teorema 1.6. *(Cambio de variable en integrales dobles)*
Sea $T : D_2 \to D_1$ una transformación C^1 y biyectiva definida entre dos regiones elementales, D_2 contenida en el plano uv y D_1 contenida en el plano xy. Entonces, si $f : D_1 \to \mathbb{R}$ es integrable,

$$\int\int_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{D_2} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

Corolario 1.2. *Si la función T transforma coordenadas polares en cartesianas, $T(r,\theta)=(x,y)$ con*

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$



Coordenadas polares

entonces el jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) = r$$

De modo que el teorema del cambio de variable nos da

$$\int\int_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{D_2} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) r\,dr\,d\theta$$

1.4. INTEGRAL TRIPLE

La integral triple se define sobre un paralelepípedo rectangular

$$B = \{(x,y,z) : a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ r \le z \le s\} \subset \mathbb{R}^3$$

de manera análoga a como se hace con las integrales dobles en rectángulos: se hace una partición de B en n^3 paralelepípedos B_{ijk}, con $i,j,k = 0,...,n-1$, y se considera la suma $S_n = \sum_{i,j,k=0}^{n-1} f(c_{ijk})\Delta V$, donde ΔV es el volumen de cada B_{ijk} y $c_{ijk} \in B_{ijk}$.

Definición 1.5. *Dada $f : B \to \mathbb{R}$ acotada, si existe $\lim_{n\to\infty} S_n$ (sin depender de los c_{ijk} elegidos), entonces decimos que f es integrable sobre B y la integral se escribe*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int\int\int_B f(x,y,z)\,dV = \int_B f\,dV$$

Las propiedades y teoremas para integrales triples son completamente análogos a los obtenidos para integrales dobles. Citemos los resultados más relevantes.

Teorema 1.7. *La integral triple existe siempre que $f : B \to \mathbb{R}$ sea continua. De hecho, basta que f sea acotada y las discontinuidades estén contenidas en gráficas de funciones continuas de dos variables.*

Teorema 1.8. *(Fubini) Si f es continua en $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$, entonces f es integrable en B y*

$$\int\int\int_B f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Existen seis órdenes posibles de integración para las integrales iteradas, dando todos el mismo resultado.

1.5. INTEGRAL TRIPLE EN REGIONES ELEMENTALES

Para definir integrales triples en regiones más generales, deben construirse las regiones elementales de dimensión 3.

Definición 1.6. *Una región sólida E se dice de* tipo 1 *si*

$$E = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

siendo $u_1, u_2 : D \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas sobre una región elemental del plano xy.

Decimos que E es de tipo 2 *si*

$$E = \{(x,y,z) : (y,z) \in D,\ u_1(y,z) \leq x \leq u_2(y,z)\}$$

siendo $u_1, u_2 : D \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas sobre una región elemental del plano yz.

Decimos que E es de tipo 3 *si*

$$E = \{(x,y,z) : (x,z) \in D,\ u_1(x,z) \leq y \leq u_2(x,z)\}$$

siendo $u_1, u_2 : D \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas sobre una región elemental del plano xz.

A estas regiones sólidas las llamaremos regiones elementales.

Definición 1.7. *(Integral triple sobre una región elemental)*

Para definir una integral triple de f sobre una región elemental E, $\int\int\int_E f(x,y,z)\,dV$, basta construir una caja B que la contenga y definir una función $F : B \to \mathbb{R}$ que coincida con f en E y valga 0 fuera de E. Entonces,

$$\int\int\int_E f(x,y,z)\,dV = \int\int\int_B F(x,y,z)\,dV$$

Teorema 1.9. *Si $f : E \to \mathbb{R}$ es continua en una región E de tipo 1, entonces*

$$\int\int\int_E f(x,y,z)\,dV = \int\int_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$

Si la región E es de tipo 2, entonces

$$\int\int\int_E f(x,y,z)\,dV = \int\int_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dA$$

Si la región E es de tipo 3, entonces

$$\int\int\int_E f(x,y,z)\,dV = \int\int_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dA$$

Observación 1.4. *Si se considera $f = 1$, entonces el volumen de la region E, $V(E)$, es igual a la integral*

$$V(E) = \int\int\int_E dV$$

1.6. CAMBIO DE VARIABLE EN INTEGRALES TRIPLES

Sea T una transformación definida entre el espacio uvw y el espacio xyz, $T(u,v,w) = (x,y,z)$, donde $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ son funciones con derivadas parciales continuas. Bajo estas condiciones, se dice que T es C^1.

Definición 1.8. *El* jacobiano *de T, una transformación C^1, es el determinante*

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Teorema 1.10. *(Cambio de variable en integrales triples)*

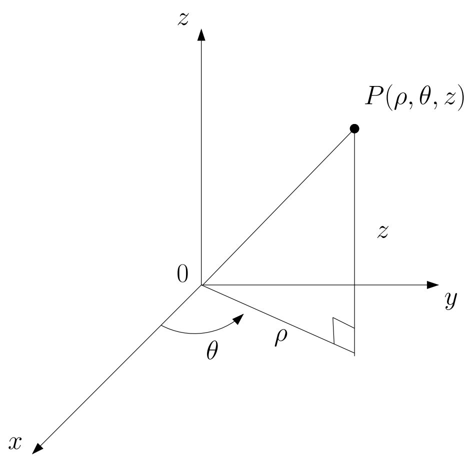
Sea $T : S_2 \to S_1$ una transformación C^1 y biyectiva definida entre dos regiones sólidas elementales, S_2 contenida en el espacio uvw y S_1 contenida en el espacio xyz. Entonces, si $f : S_1 \to \mathbb{R}$ es integrable,

$$\int\int\int_{S_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\int\int_{S_2} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

Corolario 1.3. *Si la función T transforma coordenadas cilíndricas en cartesianas, $T(r,\theta,z) = (x,y,z)$, con*

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad z = z,$$



Coordenadas cilíndricas

se tiene el jacobiano

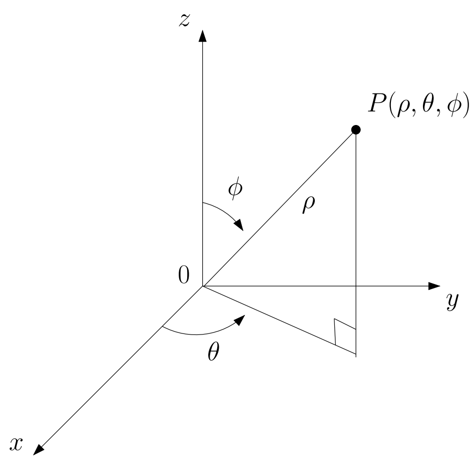
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

de modo que el teorema del cambio de variable queda así:

$$\int\int\int_{S_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_{S_2} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)r\,dr\,d\theta\,dz$$

Corolario 1.4. *Si la función T transforma coordenadas esféricas en cartesianas, $T(\rho,\theta,\phi) = (x,y,z)$, con*

$$x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \qquad y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \qquad z = \rho\cos\phi,$$



Coordenadas esféricas

se tiene el jacobiano

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} = -\rho^2\operatorname{sen}\phi,$$

de modo que el teorema del cambio de variable queda así:

$$\int\int\int_{S_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\int\int_{S_2} f(\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$