Tema 12: Integración múltiple.

José M. Salazar

Noviembre de 2016

Tema 12: Integración múltiple.

- Lección 17. Integrales dobles.
- Lección 18. Integrales triples.

Índice

Construcción y primeras definiciones

Introducción

Sea $f : B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *una función acotada de tres variables, definida sobre el paralelepípedo rectangular*

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\} \\ &= [a,b] \times [c,d] \times [r,s] \end{aligned}$$

Se consideran tres particiones $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ *y* $\mathcal{R}$ *de* $[a,b]$, $[c,d]$ *y* $[r,s]$ *respectivamente, con*

$$\mathcal{P} \equiv \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n_1} = b\}$$

$$\mathcal{Q} \equiv \{y_0 = c < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n_2} = d\}$$

$$\mathcal{R} \equiv \{z_0 = r < y_1 < y_2 < \cdots < z_{n_3} = s\}$$

Construcción y primeras definiciones

Introducción

Estas particiones determinan los paralelepípedos $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ *de la* partición de B. *Se tendrán* $n = n_1 n_2 n_3$ *paralelepípedos,* B_i*, con* $i = 1, \dots, n$.

La partición será $\Delta = \{B_1, \dots, B_n\}$. *Al volumen de cada* B_i *lo denotaremos por* $V(B_i)$.

Construcción y primeras definiciones

Introducción

Sean M_i *y* m_i *el supremo y el ínfimo de* f *en* B_i. *Consideremos las sumas*

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i V(B_i) \qquad S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i V(B_i)$$

Se cumplen las propiedades:

1. $s_\Delta \leq S_\Delta$.
2. *Si* Δ' *es más fina que* Δ ($\mathcal{P}'$ *más fina que* $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}'$ *más fina que* $\mathcal{Q}$ *y* $\mathcal{R}'$ *más fina que* $\mathcal{R}$), *entonces*
$$s_\Delta \leq s_{\Delta'} \quad y \quad S_{\Delta'} \leq S_\Delta$$
3. *Para todo par de particiones* Δ, Δ', *se tiene* $s_\Delta \leq S_{\Delta'}$
4. *Si* s *es el supremo de los* s_Δ *y* S *es el ínfimo de los* S_Δ, *entonces* $s \leq S$.

Construcción y primeras definiciones

Definición

Si $s = S$, *se dice que* f *es* integrable *en* B, *y el límite, al que llamamos* integral triple *de* f *sobre* B, *se escribe así:*

$$\int\int\int_B f(x,y,z)\, dV \quad ó \quad \int\int\int_B f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Teorema

Sea f *acotada en* B. *Entonces* f *es integrable en* B *si y sólo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe una partición* Δ *tal que* $S_\Delta - s_\Delta < \epsilon$

Construcción y primeras definiciones

Definición

Dada la partición $\Delta = \{B_1, \dots, B_n\}$,

$$s_\Delta \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, V(B_i) \leq S_\Delta$$

para cualquier selección de $(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \in B_i$. *A la suma* $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, V(B_i)$ *se la llama* suma de Riemann *asociada a* Δ.

Construcción y primeras definiciones

Definición

Una partición Δ_n de $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ es regular *si $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{Q}_n$ y $\mathcal{R}_n$ son particiones regulares de $n + 1$ puntos de $[a, b]$, $[c, d]$ y $[r, s]$ respectivamente.*

Observación

Dada la partición regular $\Delta_n = \{B_1, \ldots, B_{n^3}\}$, la integrabilidad se puede reescribir como la existencia del límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n^3} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, V(B_i)$$

para cualesquiera $(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \in B_i$.

Integrabilidad de funciones continuas

Teorema

Toda función continua $f : B \to \mathbb{R}$ definida sobre un paralelepípedo rectangular B es integrable. De hecho, basta con que f sea acotada y que el conjunto de puntos de discontinuidad esté formado por una unión finita de gráficas de funciones continuas de dos variables definidas en compactos.

Propiedades

Propiedades (Propiedades de las integrales triples)

Si f, g son integrables en B, $f+g$ y kf también lo son, cumpliéndose:

1. $\int\int\int_B (f+g)\,dV = \int\int\int_B f\,dV + \int\int\int_B g\,dV.$
2. $\int\int\int_B kf\,dV = k\int\int\int_B f\,dV.$
3. *Si* $f \geq g$, *entonces* $\int\int\int_B f\,dV \geq \int\int\int_B g\,dV.$
4. *Si* B_1, B_2 *son paralelepípedos con un lado común, y* $B = B_1 \cup B_2$, $\int\int\int_{B_1} f\,dV + \int\int\int_{B_2} f\,dV = \int\int\int_B f\,dV.$
5. $\left|\int\int\int_B f\,dV\right| \leq \int\int\int_B |f|\,dV$

Integración respecto de una variable

Definición (Integración parcial)

Sea $f : B \to \mathbb{R}$ continua en $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$. La integración parcial de f con respecto a z, $\int_r^s f(x, y, z)\, dz$, *consiste en calcular la integral en la que se consideran x, y fijas y se integra $f(x, y, z)$ con respecto a z.*

De modo análogo se define la integración parcial de f con respecto a x, $\int_a^b f(x, y, z)\, dx$, *o con respecto a y,* $\int_c^d f(x, y, z)\, dy$.

En el primer caso, $V(x, y) = \displaystyle\int_r^s f(x, y, z)\, dz$ depende de las variables x e y. En los otros dos casos se obtienen las funciones $V(x, z)$ y $V(y, z)$.

Integración iterada

Definición (Integración iterada)

Si se integra la función $V(x,y) = \int_r^s f(x,y,z)\,dz$*, respecto de* y *y respecto de* x*, se obtiene la* integral iterada*:*

$$\int_a^b \left[\int_c^d V(x,y)\,dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_r^s f(x,y,z)\,dz \right] dy \right] dx$$

Se denota:

$$\int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Obsérvese que existen seis posibles órdenes de integración.

Teorema de Fubini

Teorema (Fubini)

Sea f continua en $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$. Entonces:

$$\int\int\int_B f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

El valor de la integral no depende del orden de integración elegido.

Regiones elementales

Definición (Regiones elementales)

Una región sólida E se dice de tipo 1 *si*

$$E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

con $u_1, u_2 : D \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas sobre una región elemental del plano xy.

Decimos que E es de tipo 2 *si*

$$E = \{(x, y, z) : (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

con $u_1, u_2 : D \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas sobre una región elemental del plano yz.

Decimos que E es de tipo 3 *si*

$$E = \{(x, y, z) : (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

con $u_1, u_2 : D \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas sobre una región elemental del plano xz.

Estas regiones sólidas son regiones elementales *en el espacio.*

Integrales sobre regiones elementales

Definición (Integral sobre una región elemental)

Dada $f : E \to \mathbb{R}$ continua, con E región elemental, se define la integral de f sobre E, $\int\int\int_E f(x,y,z)\,dV$, del siguiente modo:
Sea un paralelepípedo B, con $E \subset B$, y sea $F : B \to \mathbb{R}$

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{si } (x,y,z) \in E \\ 0 & \text{si } (x,y,z) \notin E \end{cases}$$

Entonces

$$\int\int\int_E f(x,y,z)\,dV = \int\int\int_B F(x,y,z)\,dV$$

La definición no depende del B elegido.

Integrales en regiones elementales

Teorema

Si $f : E \to \mathbb{R}$ es continua en una región E de tipo 1, entonces

$$\int\int\int_E f(x,y,z)\,dV = \int\int_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$

Si la región E es de tipo 2, entonces

$$\int\int\int_E f(x,y,z)\,dV = \int\int_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dA$$

Si la región E es de tipo 3, entonces

$$\int\int\int_E f(x,y,z)\,dV = \int\int_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dA$$

Propiedades de la integración en regiones elementales

Propiedades

1. $\int\int\int_E (f+g)\, dV = \int\int\int_E f\, dV + \int\int\int_E g\, dV.$
2. $\int\int\int_E kf\, dV = k\int\int\int_E f\, dV.$
3. *Si* $f \geq g$, *entonces* $\int\int\int_E f\, dV \geq \int\int\int_E g\, dV.$
4. *Si* $E = E_1 \cup E_2$ *sin que* E_1 *y* E_2 *se solapen salvo, quizá, en los bordes, entonces* $\int\int\int_E f\, dV = \int\int\int_{E_1} f\, dV + \int\int\int_{E_2} f\, dV.$
5. $\int\int_E 1\, dV = V(E)$ *siendo* $V(E)$ *el volumen de* E.
6. *Si* $m \leq f(x,y,z) \leq M$ *para todo* $(x,y,z) \in E$, *entonces*
$$m\, V(E) \leq \int\int\int_E f\, dV \leq M\, V(E)$$
7. $\displaystyle\int\int\int_E f\, dV = f(x_0,y_0,z_0)V(E)$ *para algún* $(x_0,y_0,z_0) \in E$.

Cambio de variable en integrables triples

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación C^1 del espacio *uvw* en *xyz*, $T(u, v, w) = (x, y, z)$, esto es, con $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$.

Definición

El jacobiano de T es el determinante de su matriz jacobiana:

$$det\left(JT(u,v,w)\right) = det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Cambio de variable en integrales triples

Teorema

Sea $T : S_2 \to S_1$ una transformación C^1 y biyectiva definida entre dos regiones sólidas elementales, S_2 contenida en el espacio uvw y S_1 contenida en el espacio xyz. Entonces, si $f : S_1 \to \mathbb{R}$ es integrable,

$$\int\int\int_{S_1} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int\int\int_{S_2} f(T(u,v,w))\, |det(JT(u,v,w))|\, du\, dv\, dw$$

Cambio de variable a coordenadas cilíndricas

Teorema (Coordenadas cilíndricas)

Si la función T transforma coordenadas cilíndricas en cartesianas, $T(r,\theta,z)=(x,y,z)$, con

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta, \quad z = z$$

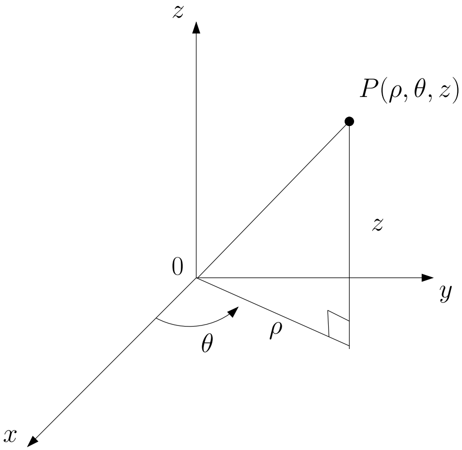
y con $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi)$ y $z\in\mathbb{R}$, se tiene el jacobiano

$$det\,(JT(r,\theta,z)) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

de modo que el teorema del cambio de variable queda así:

$$\int\int\int_{S_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_{S_2} f(T(r,\theta,z))r\,dr\,d\theta\,dz$$

Cambio de variable a coordenadas cilíndricas



Coordenadas cilíndricas

Cambio de variable a coordenadas esféricas

Teorema (Coordenadas esféricas)

Si la función T transforma coordenadas esféricas en cartesianas, $T(\rho,\theta,\phi)=(x,y,z)$, con

$$x=\rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \quad y=\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \quad z=\rho\cos\phi$$

y tal que $\rho\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,\pi)$, $\phi\in[0,2\pi)$, se tiene el jacobiano

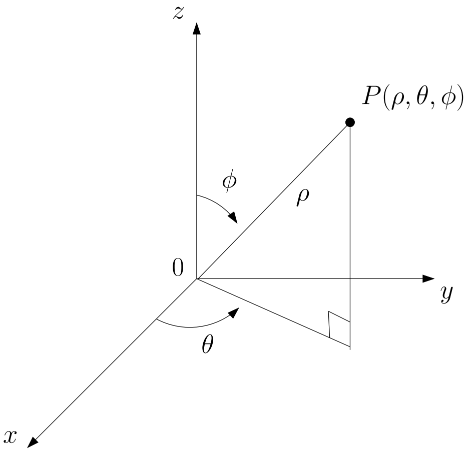
$$\begin{aligned} det\,(JT(\rho,\theta,\phi)) &= \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} \\ &= -\rho^2\operatorname{sen}\phi, \end{aligned}$$

Teorema (Coordenadas esféricas)

El teorema del cambio de variable queda así:

$$\int\int\int_{S_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\int\int_{S_2} f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi.$$



Coordenadas esféricas