1. INTEGRALES DEFINIDAS E IMPROPIAS

1.1. INTEGRAL DEFINIDA

Sea $y = f(x)$ definida para todo $x \in [a, b]$. Consideremos una partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$

$$\mathcal{P} \equiv \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

Sean

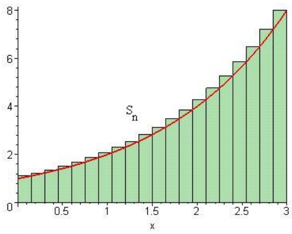
$$||\mathcal{P}|| = \text{máx}\{x_i - x_{i-1}\}, \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

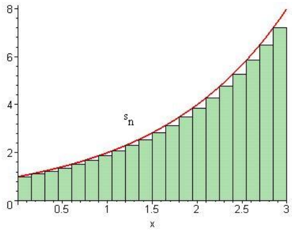
con m_i y M_i el mínimo y el máximo de f en $[x_{i-1}, x_i]$.

Si $\displaystyle\lim_{\substack{n\to\infty \\ ||\mathcal{P}||\to 0}} s_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ ||\mathcal{P}||\to 0}} S_n$, entonces se dice que f es integrable en $[a, b]$ y

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ ||\mathcal{P}||\to 0}} s_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ ||\mathcal{P}||\to 0}} S_n =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ ||\mathcal{P}||\to 0}} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]}}^{n} f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1})$$





Es claro que, para todo n, $s_n \leq A \leq S_n$.

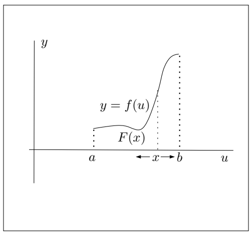
1.1.1. Propiedades. Teorema Fundamental del Cálculo

1. $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$
2. $\int_a^b kf = k \int_a^b f$
3. $\int_a^b f = -\int_b^a f$
4. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \, \forall \, c \in [a,b]$
5. $\int_a^a f = 0$
6. Si $f(x) \geq 0 \, \forall \, x \in [a,b]$, $\int_a^b f \geq 0$
7. Si $f \leq g$ en $[a,b]$, $\int_a^b f \leq \int_a^b g$
8. $\int_a^b |f| \geq \left| \int_a^b f \right|$

Teorema 1.1. *Si f es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.*

Teorema 1.2. *Teorema del valor medio integral.*
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Entonces existe $\alpha \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f = f(\alpha)(b-a)$

Teorema 1.3. *Teorema Fundamental del Cálculo.*
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Entonces, $F(x) = \int_a^x f(u)\,du$, con $x \in [a,b]$, es derivable en (a,b) y $F'(x) = f(x)$ (F es una primitiva de f, esto es, $F(x) + C = \int f(x)\,dx$).



Corolario 1.1. *Regla de Barrow.*
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ ($F'(x) = f(x)$ ó $F(x) + C = \int f(x)\,dx$). Entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Teorema 1.4. *(Cambio de variable)*
Si $x = g(t)$ con g, g' continuas en $[c,d]$, $g(c) = a$, $g(d) = b$, y tal que $f(g(t))$ es continua en $[c,d]$, entonces

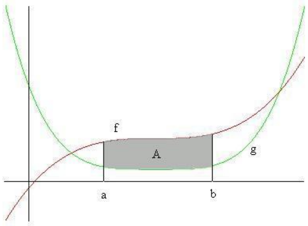
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt$$

1.1.2. Aplicaciones de la integral

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ siendo $F'(x) = f(x)$.

a) ÁREAS. Para el cálculo de áreas del recinto encerrado entre dos curvas integrables, se utiliza la definición de la integral de Riemann, separando la integral en intervalos donde se mantiene el signo.

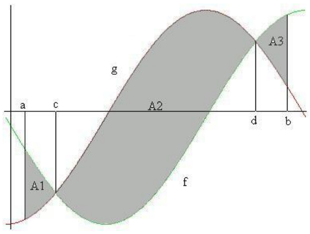
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



$$A = A_1 + A_2 + A_3 =$$

$$= \int_a^c (f(x) - g(x))\, dx + \int_c^d (g(x) - f(x))\, dx + \int_d^b (f(x) - g(x))\, dx =$$

$$= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



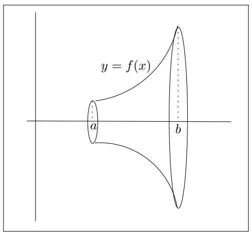
Si la curva viene dada en paramétricas ($x = u(t)$, $y = v(t)$), entonces el área es

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)u'(t)|\, dt \text{ con } u(t_1) = a \text{ y } u(t_2) = b$$

b) VOLÚMENES.

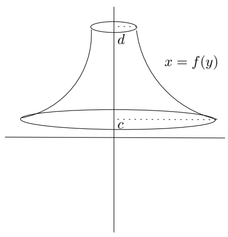
b.1) El volumen del sólido de revolución que genera, al girar sobre el eje OX, el recinto encerrado por $y = f(x)$, el eje $0X$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, viene dado por la fórmula

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$



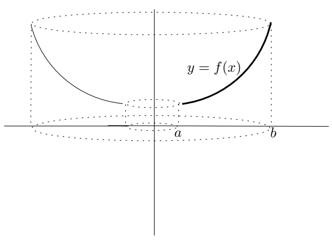
b.2) El volumen del sólido de revolución que genera al girar sobre el eje OY el recinto encerrado por $x = f(y)$, el eje $0Y$ y las rectas $y = c$ y $y = d$ viene dado por la fórmula

$$V_y = \pi \int_c^d (f(y))^2 \, dy$$



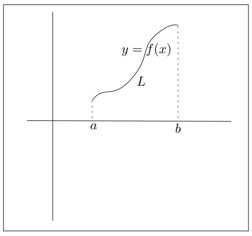
b.3) El recinto determinado por $y = f(x)$ y el eje OX, girando sobre el eje OY, tiene volumen

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx$$



c) LONGITUDES DE ARCO. La longitud de un arco de la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$L_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



Si la función está dada en paramétricas $x = u(t)$ e $y = v(t)$, entre $t = t_1$ y $t = t_2$, entonces

$$L_f = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} dt$$

d) SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN. La superficie de revolución del sólido que genera la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$, al girar sobre los ejes OX y OY, tiene un área que viene dada por las fórmulas

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \qquad S_y = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Si la función está dada en forma paramétrica $x = u(t)$ e $y = v(t)$ desde $t = t_1$ hasta $t = t_2$ (suponemos que no hay autointersecciones), se tiene la fórmula

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} v(t)\sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} dt$$

$$S_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} u(t)\sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} dt$$

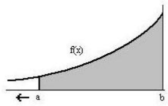
1.2. INTEGRALES IMPROPIAS

1.2.1. Límites de integración infinitos (1ª especie)

Se definen como integrales impropias de límites infinitos las siguientes integrales:

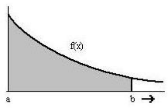
a) Si $\int_a^b f(x)\, dx$ existe para todo $a \leq b$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x) dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{a \to -\infty} (F(b) - F(a))$$



b) Si $\int_a^b f(x)\,dx$ existe para todo $b \geq a$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} (F(b) - F(a))$$



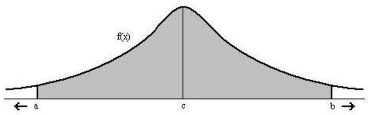
En el caso de que existan los límites y sean finitos, se dice que la integral impropia converge y tiene como valor dicho límite. En caso de que no existan o sean infinitos, se dice que diverge.

c) Si tanto $\int_c^\infty f(x)\,dx$ como $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ son convergentes, entonces definimos

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)dx$$

donde c es cualquier número real.



Ejemplo. Veamos que la integral impropia de primera especie $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^c}\,dx$ converge si y sólo si $c > 1$.

Estudiemos primero el caso en que $c \neq 1$,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^c}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-c}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-c+1}}{-c+1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-c}\left[\frac{1}{b^{c-1}} - 1\right]$$

Entonces, si $c > 1$, tenemos que $c-1 > 0$, con lo que $1/b^{c-1} \to 0$ cuando $b \to \infty$. Esto implica que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^c}\,dx = \frac{1}{c-1} \qquad \text{si } c > 1,$$

con lo que la integral converge.

Si $c < 1$, tenemos que $c-1 < 0$, con lo que $1/b^{c-1} \to \infty$ cuando $b \to \infty$. Esto implica que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^c}\,dx = \infty \qquad \text{si } c < 1,$$

por lo que la integral diverge.

Únicamente queda estudiar el caso $c = 1$. Entonces

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b\to\infty} [\ln b - \ln 1] = \infty,$$

de modo que la integral diverge.

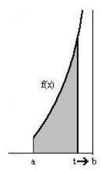
1.2.2. Integrandos infinitos (2ª especie)

En el caso de que la función no esté acotada en el intervalo de integración, se obtiene un recinto ilimitado vertical.

a) Integrando infinito en un extremo del intervalo. Sea $f(x)$ continua en $[a,b)$ y tal que $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty(-\infty)$. Entonces se define la integral impropia

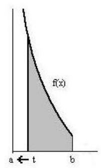
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

Si dicho límite existe y es finito, se dice que la integral impropia es convergente y, en caso contrario, que es divergente.



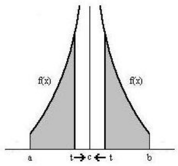
Análogamente en el otro extremo del intervalo, esto es, si $f(x)$ es continua en $(a,b]$ y tal que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty(-\infty)$, entonces se define la integral impropia

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$



b) Integrando infinito en un punto del interior del intervalo. Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$, excepto en un punto $c \in (a,b)$ y tal que $\lim_{x\to c} |f(x)| = \infty$. Entonces se define

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



Diremos que $\int_a^b f(x)dx$ converge en el caso de que estas dos últimas integrales converjan. En caso contrario, tendremos divergencia.

Existe también la integral de 3ª especie, que es la suma de los dos casos anteriores (1ª especie + 2ª especie).

1.2.3. Criterios de convergencia

Una condición necesaria para que una integral impropia de 1ª especie $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converja, es que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

A continuación ofrecemos un criterio para determinar si una integral impropia es convergente o no, sin necesidad de calcularla explícitamente.

Criterio de comparación. Sean f y g continuas con $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para $x \geq a$. Se tiene:

a) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ también lo es.

b) Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ también diverge.

Obsérvese que, aunque enunciado para integrales de 1ª especie, el criterio anterior también es válido para integrales de 2ª especie.