1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1.1. PRIMERAS DEFINICIONES. PROBLEMA DEL VALOR INICIAL

Definición 1.1. *Una* ecuación diferencial *es una ecuación en la que intervienen una variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes. Por ejemplo:*

1. $\dfrac{dy}{dt} = 30y$ *ó* $y' = 30y$ *(modelo de crecimiento de poblaciones).*

2. $\dfrac{dy}{dt} = 3(y-60)$ *ó* $y' = 3(y-60)$ *(ley de enfriamiento de Newton).*

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ *ó* $y'' + 3y' + 2y = 0$.

4. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \cos x$ *ó* $y''' + 2(y'')^2 = \cos x$.

Llamamos a la x y a la t variables independientes, y a la $y = y(x)$ ó $y = y(t)$, variable dependiente. A estas ecuaciones con una sola variable independiente se les llama ecuaciones diferenciales ordinarias.

El orden *de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden en la ecuación. Así, $y'' + 3y' = x + 2$ es de orden 2.*

El grado *de una ecuación diferencial es el grado de la derivada de mayor orden que aparece. Así, $(y'')^3 + 3(y')^4 = x + 2$ tiene grado 3.*

Una ecuación diferencial ordinaria general de orden n se suele escribir en la forma $F(x, y, y', \ldots, y^{n)}) = 0$, aunque otro modo habitual es expresarla en forma canónica o reducida $y^{n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1)})$.

Definición 1.2. *Dada una ecuación diferencial ordinaria de orden n*

$$(1) \quad F(x, y, y', \ldots, y^{n)}) = 0,$$

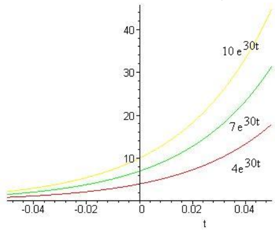
llamamos solución de (1) en un intervalo $I = (a, b)$ a una función $y = y(x)$ definida en (a, b) tal que $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n)}(x)) = 0$ para todo $x \in I$.

Ejemplo 1.1. *Dada la ecuación diferencial $y' = 30y$, con $y = y(t)$, resulta*

$$\frac{y'}{y} = 30 \Rightarrow \int \frac{y'}{y}\, dt = \int 30\, dt \Rightarrow \ln y = 30t + C \Rightarrow y = e^C e^{30t} \Rightarrow y(t) = De^{30t}$$

De modo que la solución general de la ecuación diferencial $y' = 30y$ es $y(t) = De^{30t}$, con $D = e^C$ tomando cualquier valor real positivo. Esta solución representa un modelo de crecimiento de población con recursos ilimitados en el que la velocidad de expansión de la población sólo dependerá del número de individuos iniciales (para tiempo $t = 0$, tenemos

$y(0) = D = e^C$ individuos). La expresión $y(t) = De^{30t}$ recibe el nombre de familia monoparamétrica de soluciones*, ya que para cada valor del parámetro D obtenemos una solución de la ecuación diferencial.*



Ejemplo 1.2. *Dada la ecuación diferencial de segundo orden $y'' + 16y = 0$, la expresión $y(x) = C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x$, es una* familia biparamétrica de soluciones *de la misma, esto es, para cada par de valores que demos a los parámetros $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, obtenemos una solución de la ecuación. En efecto,*

$$y'(x) = -4C_1 \operatorname{sen} 4x + 4C_2 \cos 4x \quad y''(x) = -16C_1 \cos 4x - 16C_2 \operatorname{sen} 4x.$$

Al sustituir en la ecuación $y''(x), y(x)$ por los valores obtenidos, se tiene

$$-16C_1 \cos 4x - 16C_2 \operatorname{sen} 4x + 16(C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x) = 0,$$

con lo que $y(x) = C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x$ cumple la ecuación diferencial y es, por tanto, una solución de la misma para cualesquiera valores de C_1 y C_2.

A menudo interesa resolver una ecuación diferencial $y^{n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1)})$ sujeta a unas condiciones prescritas $\{y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{n-1)}(x_0) = y_{n-1}\}$, con $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ constantes conocidas. A los problemas de este tipo se les llama *problemas de valor inicial.*

Problema de valor inicial de primer orden.

Se trata de encontrar la solución de una ecuación diferencial de primer orden sujeta a una única condición inicial

$$(1) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Valga como ejemplo el problema

$$(1) \begin{cases} y' = 30y \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

Por lo visto en el Ejemplo 1, la solución general es $y(t) = De^{30t}$. Como, además, debe verificar la condición inicial $y(0) = 4$, se tiene $4 = De^0 = D$. En consecuencia, la única solución de la ecuación diferencial que cumple la condición inicial es $y(t) = 4e^{30t}$.

Teorema 1.1. *Existencia y unicidad de soluciones.*

Sea $R = \{(x, y) : a < x < b,\, c < y < d\}$ *con* $(x_0, y_0) \in R$. *Si* f *y* $\frac{df}{dx}$ *son continuas en* R, *entonces existe un intervalo* $I = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ *y una única función* $y(x)$ *definida en* I *que cumple*

$$(1)\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

1.2. ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

Definición 1.3. *Variables separables.*

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma $g(x)+h(y)\dfrac{dy}{dx} = 0$, *con* g *y* h *continuas, se dice que es* separable *o de* variables separables. *Se puede reescribir separando las variable en la forma* $h(y)dy = -g(x)dx$.

Ejemplo 1.3. *Hallemos la solución general de la ecuación de variables separables* $(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} = xy$.

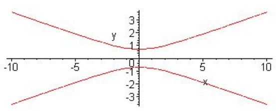
Al separar variables, queda la expresión $\frac{1}{y}dy = \frac{x}{x^2+4}dx$. *Integrando ambos miembros, tenemos*

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C_1 = \ln\sqrt{x^2+4} + C_1$$

En consecuencia,

$$|y| = e^{C_1}\sqrt{x^2+4} \Rightarrow y = \pm e^{C_1}\sqrt{x^2+4} \Rightarrow y = C\sqrt{x^2+4}$$

Si buscamos la solución particular que cumple una condición inicial dada, por ejemplo, $y(2) = 1$, *entonces tenemos* $1 = C\sqrt{2^2+4}$, *lo que implica que* $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. *La solución será* $y(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^2+4}$. *Elevando al cuadrado, obtenemos la hipérbola* $8y^2 - x^2 = 4$. *La solución es la rama positiva (*$y > 0$*).*



Definición 1.4. *Funciones homogéneas.*

Una función $f(x, y)$ *es homogénea de grado* n *si* $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

Ejemplo 1.4. *1.* $f(x, y) = x^4 - x^3y$ *es homogénea de grado 4.*

2. $f(x, y) = e^{y/x} + \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$ *es homogénea de grado 0.*

Definición 1.5. *Ecuaciones diferenciales homogéneas.*

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

donde M y N son funciones homogéneas del mismo grado, se dice que es una ecuación diferencial homogénea. *Estas ecuaciones se resuelven haciendo el cambio $y = vx$ (donde $v = v(x)$ es derivable), transformándolas en ecuaciones de variables separables.*

Ejemplo 1.5. *Hallar la solución general de $(x^2 - y^2)dx + 3xydy = 0$.*

Como $M(x,y) = (x^2 - y^2)$ y $N(x,y) = 3xy$ son ambas homogéneas de grado 2, hacemos $y = vx$. Así, $dy = xdv + vdx$, de modo que, sustituyendo y y dy en la ecuación, obtenemos

$$(x^2 - v^2x^2)dx + 3x(vx)(xdv + vdx) = 0 \Rightarrow (x^2 + 2v^2x^2)dx + 3x^3vdv = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(1 + 2v^2)dx + x^2(3vx)dv = 0$$

Esta segunda ecuación es de variables separables. Dividiendo entre x^2 y separando variables, queda

$$(1 + 2v^2)dx = -3vxdv \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{-3v}{1 + 2v^2}dv \Rightarrow$$

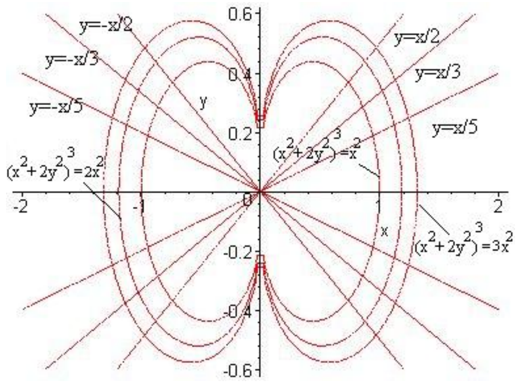
$$\Rightarrow \ln|x| = -\frac{3}{4}\ln(1 + 2v^2) + C_1 \Rightarrow 4\ln|x| = -3\ln(1 + 2v^2) + \ln|C_2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x^4 = \ln\left|C_2(1 + 2v^2)^{-3}\right| \Rightarrow x^4 = C_2(1 + 2v^2)^{-3}$$

Una vez resuelta la segunda ecuación, se deshace el cambio $v = \frac{y}{x}$, para obtener

$$x^4 = C_2\left[1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{-3} \Rightarrow (x^2 + 2y^2)^3 = Cx^2$$

Una propiedad interesante de las ecuaciones homogéneas (1) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es que $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$ es una función homogénea de grado 0, de modo que $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, esto es, las rectas que pasan por el origen son *isoclinas* de (1) (las pendientes y' de las soluciones de (1) son constantes a lo largo de cada una de estas rectas). La siguiente figura ilustra esta situación con el último ejemplo.



Definición 1.6. *Ecuaciones diferenciales exactas.*

La ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta *si existe una función $f(x,y)$, con derivadas parciales continuas, tal que*

$$f_x(x,y) = M(x,y) \text{ y } f_y(x,y) = N(x,y)$$

La solución general de la ecuación es $f(x,y) = C$. Para comprobarlo, basta derivar esta expresión con respecto a la x para obtener

$$f_x(x,y) + f_y(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Teorema 1.2. *Criterio de exactitud.*

Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ tienen derivadas parciales continuas en un disco abierto R, la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si y sólo si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ ó, equivalentemente, } M_y = N_x$$

Ejemplo 1.6. *Resolver la ecuación diferencial exacta $(\cos x - x \operatorname{sen} x + y^2)dx + 2xydy = 0$. Hallar la solución particular que satisface la condición inicial $y = 1$ en $x = \pi$.*

Efectivamente, es exacta, ya que $M_y = 2y = N_x$. Buscamos una solución del tipo $f(x,y) = C$ con $f_x = M$ y $f_y = N$. Como N es más sencilla que M, integramos N para determinar f:

$$f(x,y) = \int N(x,y)\, dy = \int 2xy\, dy = xy^2 + g(x)$$

Queda determinar quién es $g(x)$. Como

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[xy^2 + g(x)] = y^2 + g'(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x + y^2,$$

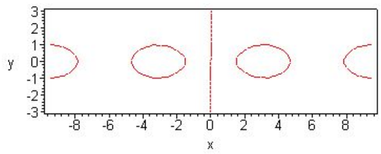
llegamos a la conclusión de que $g'(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x$. *Entonces*

$$g(x) = \int (\cos x - x \operatorname{sen} x)dx = x \cos x + C$$

La última igualdad se obtiene integrando por partes. Esto implica que $f(x, y) = xy^2 + x \cos x + C$, *de modo que la solución general de la ecuación es*

$$xy^2 + x \cos x = C$$

La solución particular que pasa por $(x, y) = (\pi, 1)$ *exige que* $\pi + \pi \cos \pi = C$ *de modo que* $C = 0$ *y la solución es* $xy^2 + x \cos x = 0$. *Su gráfica es la siguiente:*



Definición 1.7. *Factores integrantes.*

Si la ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ *no es exacta, cabe la posibilidad de que, al multiplicarla por un factor adecuado* $\mu(x, y)$, *se convierta en exacta. En tal caso,* μ *se denomina* factor integrante *de la ecuación.*

Teorema 1.3. *Factores integrantes.*

Consideremos la ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

1. *Si* $\dfrac{1}{N(x, y)}[M_y(x, y) - N_x(x, y)] = h(x)$ *depende sólo de* x, *entonces* $\mu(x) = e^{\int h(x)\, dx}$ *es un factor integrante.*

2. *Si* $\dfrac{1}{M(x, y)}[N_x(x, y) - M_y(x, y)] = h(y)$ *depende sólo de* y, *entonces* $\mu(y) = e^{\int h(y)\, dy}$ *es un factor integrante.*

Ejemplo 1.7. *Resolver la ecuación diferencial* $(y^2 - x)dx + 2ydy = 0$.

Tenemos $M_y = 2y$, $N_x = 0$, *de modo que la ecuación no es exacta. Por otro lado,*

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2y}{2y} = 1 = h(x),$$

con lo que $\mu(x) = e^{\int 1\, dx} = e^x$ *es un factor integrante. Multiplicando la ecuación por* e^x *obtendremos la ecuación exacta*

$$(y^2e^x - xe^x)dx + 2ye^x dy = 0$$

Ahora tenemos $M(x,y) = y^2e^x - xe^x$ *y* $N(x,y) = 2ye^x$ *y se cumple* $M_y = 2ye^x = N_x$. *Buscamos una solución* $f(x,y) = C$ *con* $f_x = M$ *y* $f_y = N$.

$$f(x,y) = \int N_y\, dy = \int 2ye^x\, dy = y^2e^x + g(x)$$

Por otro lado,

$$f_x(x,y) = y^2e^x + g'(x) = y^2e^x - xe^x$$

Entonces $g'(x) = -xe^x$, *de manera que, integrando por partes, se obtiene* $g(x) = -xe^x + e^x + C$, *con lo que* $f(x,y) = y^2e^x - xe^x + e^x + C$. *La solución general de la ecuación es* $y^2e^x - xe^x + e^x = C$.

Definición 1.8. *Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.*

Se llama ecuación diferencial lineal de primer orden a cualquier ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

con P *y* Q *funciones continuas de* x. *Esta ecuación se dice que está en forma normal.*

Teorema 1.4. *Solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden.*

La ecuación lineal de primer orden $y' + P(x)y = Q(x)$ *admite el factor integrante* $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$. *La solución de la ecuación es*

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx + C$$

Otro modo de resolver este tipo de ecuaciones es mediante el método de *variación de las constantes*. Se resuelve, en primer lugar, la parte homogénea de la ecuación ($y' + P(x)y = 0$). A dicha solución, que se obtiene separando variables, la denotamos por $y_h(x) = Ke^{\int -P(x)\,dx}$. La solución general de $y' + P(x)y = Q(x)$ es de la forma $y = y_h + y_p$, siendo y_p una solución particular de la ecuación. La solución particular se supone de la forma $y_p = K(x)e^{\int -P(x)\,dx}$. De ahí el nombre del método. Veamos con un ejemplo cómo resolver este tipo de ecuaciones.

Ejemplo 1.8. *Hallar la solución general de* $xy' - 2y = x^2$.

La forma canónica o normal es $y' - \left(\dfrac{2}{x}\right) y = x$. *Tenemos* $P(x) = -2/x$, *de modo que*

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{-\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2}$$

es un factor integrante. Multiplicamos la ecuación en forma canónica por el factor integrante y obtenemos

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3}y = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{y}{x^2}\right] = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y}{x^2} = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x^2} = \ln|x| + C \Rightarrow y = x^2(\ln|x| + C)$$

Si queremos aplicar el método de variación de las constantes, primero calculamos y_h, esto es, la solución de la ecuación $y' - \left(\frac{2}{x}\right)y = 0$. Separando variables e integrando, se tiene

$$y_h(x) = Kx^2$$

La solución particular se supone del tipo $y_p(x) = K(x)x^2$. Sustituyendo en la ecuación inicial, resulta

$$K'(x)x^2 + 2xK(x) - \frac{2}{x}x^2K(x) = x \qquad \text{esto es} \qquad K'(x)x^2 = x$$

De modo que $K(x) = \ln|x|$. Tenemos como solución particular $y_p(x) = x^2\ln|x|$. En consecuencia, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Kx^2 + x^2\ln|x| = x^2(\ln|x| + K)$$

Definición 1.9. *Ecuaciones de Bernoulli.*

Una ecuación de Bernoulli tiene la forma $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, con $n \neq \{0,1\}$ un número real. Haciendo el cambio de variable $v = y^{1-n}$, nos queda una ecuación lineal de primer orden que ya sabemos resolver. Deshacemos el cambio, y la ecuación está resuelta.

Ejemplo 1.9. *Hallar la solución general de $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$.*

Tenemos $n = -3$, de modo que $v = y^4$, lo que implica que $y = v^{1/4}$. Además, $v' = 4y^3y'$, con lo que $y' = \dfrac{v'}{4y^3} = \dfrac{v'}{4v^{3/4}}$. Sustituyendo en la ecuación por y e y', tenemos

$$\frac{v'}{4v^{3/4}} + xv^{1/4} = xe^{-x^2}v^{-3/4}.$$

Multiplicando la ecuación por $4v^{3/4}$ para dejar v' solo, obtenemos

$$v' + 4xv = 4xe^{-x^2}$$

Esta ecuación es lineal. Resolviéndola, se obtiene $v = 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2}$ y, deshaciendo el cambio, queda $y^4 = 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2}$, que es la solución buscada.

1.3. ECUACIONES LINEALES DE 2º ORDEN

Definición 1.10. *Ecuación diferencial lineal de orden n.*

Sean $g_1, \ldots, g_n, f : I \to \mathbb{R}$ continuas. Una ecuación diferencial de la forma

$$y^{n)} + g_1(x)y^{n-1)} + g_2(x)y^{n-2)} + \cdots + g_{n-1}(x)y' + g_n(x)y = f(x)$$

se llama ecuación diferencial lineal de orden n*. Si $f(x) = 0$, la ecuación se llama* homogénea*. En caso contrario es* no homogénea.

Teorema 1.5. *Problema del valor inicial.*

La ecuación (1) $y^{n)} + g_1(x)y^{n-1)} + g_2(x)y^{n-2)} + \cdots + g_{n-1}(x)y' + g_n(x)y = f(x)$ *sujeta a las condiciones iniciales*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots, y^{n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

tiene una solución única en todo el intervalo I.

Dedicaremos nuestra atención a las ecuaciones lineales (principalmente las de 2º orden) con *coeficientes constantes*, esto es, con $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$ constantes. Comenzamos estudiando el caso homogéneo.

1.3.1. Ecuaciones homogéneas de coeficientes constantes

Definición 1.11. *Dependencia e independencia lineal de funciones.*

Las funciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ son linealmente dependientes en un intervalo I si existen constantes $C_1, \ldots, C_n$, no todas nulas, tales que

$$C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x) = 0 \text{ para todo } x \in I.$$

Dicho de otro modo, serán linealmente dependientes si alguna de las funciones se puede escribir como combinación lineal del resto.

En caso de no ser linealmente dependientes, se dice que son linealmente independientes (ninguna se puede poner como combinación lineal del resto). Dicho de otro modo, si

$$C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x) = 0 \text{ para todo } x \in I,$$

entonces $C_1 = \cdots = C_n = 0$.

Ejemplo 1.10. *Compruébese que las funciones $\{y_1(x) = \operatorname{sen} x, y_2(x) = x\}$ son linealmente independientes, mientras que $\{y_1(x) = x, y_2(x) = 3x\}$ son linealmente dependientes (considérese $I = \mathbb{R}$).*

Teorema 1.6. *Si y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial* (1) $y'' + ay' + by = 0$*, la solución general es*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

En el teorema anterior hemos visto que dos soluciones linealmente independientes de (1) $y'' + ay' + by = 0$ nos permiten determinar la solución general. Pero ¿cómo obtener dichas soluciones? Para responder a esa cuestión hacemos uso de la *ecuación característica* de (1), que es $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. El estudio de las soluciones de esta ecuación nos da la estructura de las soluciones de (1), tal como indica el siguiente resultado.

Teorema 1.7. *Las soluciones de* (1) $y'' + ay' + by = 0$ *pueden ser de tres tipos, dependiendo de las soluciones λ_1, λ_2 de la ecuación característica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.*

1. *Raíces reales distintas. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son ambas reales, la solución general es*

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. *Raíces reales iguales. Si $\lambda_1 = \lambda_2$ son ambas reales, la solución general es*

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$$

3. *Raíces complejas conjugadas. Si $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, la solución general es*

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

Ejemplo 1.11. *Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales:*
1. $y'' + 6y' + 12y = 0$ *2.* $y'' - 4y = 0$

1. Resolvamos $\lambda^2 + 6\lambda + 12 = 0$.

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{-12}}{2} = -3 \pm \sqrt{-3} = -3 \pm \sqrt{3} i$$

Por tanto, $\alpha = -3$ y $\beta = \sqrt{3}$, con lo que la solución general es

$$y = C_1 e^{-3x} \cos \sqrt{3} x + C_2 e^{-3x} \operatorname{sen} \sqrt{3} x$$

2. Resolvamos $\lambda^2 - 4 = 0$. Resulta $\lambda = \pm 2$, con lo que la solución general es

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

Ejemplo 1.12. *Resolver la ecuación diferencial* $y'' + 4y' + 4y = 0$ *con las condiciones iniciales* $y(0) = 2, y'(0) = 1$.

Resolvamos $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. *Como* $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$, *resulta que* $\lambda = -2$ *es la única raíz (real y doble).*

Por tanto, la solución general es

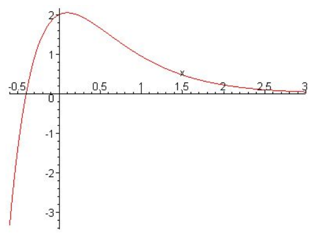
$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

Como $y = 2$ *en* $x = 0$, *tenemos* $2 = C_1 + 0C_2 = C_1$. *Además,* $y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2(-2xe^{-2x} + e^{-2x})$. *Como* $y'(0) = 1$, *al sustituir, tenemos*

$$1 = -2(2)(1) + C_2[-2(0)(1) + 1] \Rightarrow 5 = C_2$$

La solución particular es

$$y = 2e^{-2x} + 5xe^{-2x}$$



1.3.2. Ecuaciones no homogéneas de coeficientes constantes

Teorema 1.8. *Sea* (1) $y'' + ay' + by = f(x)$ *una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden. Si* y_p *es una solución particular de* (1) *e* y_h *es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente, entonces*

$$y = y_h + y_p$$

es la solución general de (1).

De modo que, para resolver ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden de coeficientes constantes, únicamente necesitamos encontrar una solución particular y_p. Veremos dos métodos.

Método de los coeficientes indeterminados.

Este método sólo es efectivo para ecuaciones del tipo (1) $y'' + ay' + by = f(x)$, con $f(x)$ función que consta de sumas y productos de $x^n, e^{mx}, \cos\beta x$ y $\operatorname{sen}\beta x$. Las soluciones particulares y_p que se consiguen con este método son, de algún modo, generalizaciones de la función $f(x)$.

Si $f(x) = ax^n e^{\alpha x} \cos\beta x$ ó $f(x) = ax^n e^{\alpha x} \operatorname{sen}\beta x$, se trabaja con

$$y_p = x^n e^{\alpha x}(A_n \cos\beta x + B_n \operatorname{sen}\beta x) + x^{n-1} e^{\alpha x}(A_{n-1} \cos\beta x + B_{n-1} \operatorname{sen}\beta x) + \cdots$$

$$\cdots + xe^{\alpha x}(A_1 \cos \beta x + B_1 \operatorname{sen} \beta x) + e^{\alpha x}(A_0 \cos \beta x + B_0 \operatorname{sen} \beta x).$$

Obsérvese que los casos $f(x) = a \cos \beta x$, $f(x) = a \operatorname{sen} \beta x$, $f(x) = ae^{\alpha x}$, $f(x) = ax^n$, son casos particulares del mencionado arriba.

Si $f(x)$ es una suma de varias de las anteriores, por ejemplo, $f(x) = 3x^2 + \cos 2x$, escogemos $y_p = (Ax^2 + Bx + C) + (D \cos 2x + E \operatorname{sen} 2x)$.

Debemos hacer notar que, en ocasiones, la candidata a solución particular y_p o uno de sus sumandos resulta ser solución de la parte homogénea. En estas circunstancias de "solapamiento" de soluciones, se debe multiplicar el sumando mencionado de y_p por un x^n adecuado que evite el solapamiento.

Estudiemos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.13. *Calcular la solución general de la ecuación* (1) $y'' - 2y' - 3y = 2 \operatorname{sen} x$.

El cálculo de la solución general y_h de la ecuación homogénea $y'' - 2y' - 3y = 0$ nos da

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

Tenemos $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$. Elegimos $y_p = A \cos x + B \operatorname{sen} x$. Entonces

$$\begin{aligned} y_p' &= -A \operatorname{sen} x + B \cos x \\ y_p'' &= -A \cos x - B \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (1), *queda*

$$(-4A - 2B) \cos x + (2A - 4B) \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x$$

Igualando coeficientes de términos análogos, obtenemos

$$\begin{cases} -4A - 2B &= 0 \\ 2A - 4B &= 2 \end{cases}$$

con soluciones $A = 1/5$ y $B = -2/5$. En consecuencia,

$$y_p = \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \operatorname{sen} x$$

Como la solución general de (1) *es $y = y_h + y_p$, tenemos*

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \operatorname{sen} x$$

Ejemplo 1.14. *Calcular la solución general de la ecuación* (1) $y'' - 2y' = x + 2e^x$.

El cálculo de la solución general y_h de la ecuación homogénea $y'' - 2y' = 0$ nos daba

$$y_h = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Tenemos $f(x) = x + 2e^x$. *La primera elección de* y_p *es* $y_p = (A + Bx) + (Ce^x)$. *Sin embargo, como* y_h *ya contiene un término constante* C_1, *éste debe desaparecer de* y_p. *Para ello, basta multiplicar la parte polinómica* $(A + Bx)$ *de* y_p *por* x. *Entonces, obtenemos una nueva* y_p

$$y_p = Ax + Bx^2 + Ce^x$$

Esta candidata a solución particular no produce solapamiento con los sumandos de y_h. *Calculemos los valores de* A, B, C.

$$\begin{array}{rcl} y_p' & = & A + 2Bx + Ce^x \\ y_p'' & = & 2B + Ce^x \end{array}$$

Sustituimos en la ecuación (1) *y obtenemos*

$$(2B - 2A) - 4Bx - Ce^x = x + 2e^x$$

Igualando los coeficientes de los términos idénticos, obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2B - 2A & = & 0 \\ -4B & = & 1 \\ -C = 2 & & \end{array} \right.$$

con soluciones $A = B = -\frac{1}{4}$ *y* $C = -2$. *En consecuencia,*

$$y_p = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - 2e^x$$

Como la solución general de (1) *es* $y = y_h + y_p$, *tenemos*

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - 2e^x$$

Método de variación de las constantes.

El método de los coeficientes indeterminados es eficaz para resolver la ecuación $y'' + ay' + by = f(x)$ cuando $f(x)$ consta de polinomios o funciones cuyas derivadas sucesivas presentan carácter cíclico. Sin embargo, para funciones $f(x)$ tales como $1/x$, $\operatorname{tg} x$ y muchas otras, este carácter cíclico de las derivadas no se da, y el método a utilizar es el de variación de las constantes, válido para cualquier $f(x)$.

Teorema 1.9. *Método de variación de las constantes.*
La solución general de la ecuación $y'' + ay' + by = f(x)$ *se puede calcular siguiendo estos pasos:*

1. *Hallar* $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

2. *Tomar* $y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$.

3. *Para determinar* $u_1(x)$ *y* $u_2(x)$*, resolver el siguiente sistema en* u_1' *y* u_2'

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1'y_1 + u_2'y_2 & = & 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' & = & f(x) \end{array} \right.$$

4. *Integrando los resultados obtenidos para* $u_1'(x)$ *y* $u_2'(x)$ *se calculan* $u_1(x)$ *y* $u_2(x)$*. La solución general es* $y = y_h + y_p$.

Ejemplo 1.15. *Resolver la ecuación* $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2x}$, $x > 0$.

La solución de la parte homogénea es $y_h = C_1e^x + C_2xe^x$*, con lo que* $y_1 = e^x$ *y* $y_2 = xe^x$*. Entonces, la solución particular será de la forma* $y_p = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x$*. Calculemos* $u_1(x)$ *y* $u_2(x)$*. Para ello, resolvemos el sistema de ecuaciones*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1'e^x + u_2'xe^x & = & 0 \\ u_1'e^x + u_2'(xe^x + e^x) & = & \frac{e^x}{2x} \end{array} \right.$$

Restando las dos ecuaciones, obtenemos $u_2' = \frac{1}{2x}$*. Sustituyendo en la primera ecuación, resulta* $u_1' = -\frac{1}{2}$*. Integrando, queda*

$$u_1 = -\frac{x}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{2}\ln x = \ln\sqrt{x}$$

De modo que $y_p = -\frac{1}{2}xe^x + (\ln\sqrt{x})xe^x$*, con lo que la solución general es*

$$y = y_h + y_p = C_1e^x + C_2xe^x - \frac{1}{2}xe^x + (\ln\sqrt{x})xe^x$$