1. ECUAC. DIFERENCIALES ORDINARIAS

Variables separables.

1. Hallar la solución general de la ecuación de variables separables $(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} = xy$.

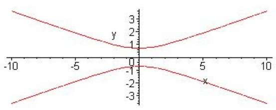
   Al separar variables, queda la expresión $\frac{1}{y}dy = \frac{x}{x^2+4}dx$. Integrando ambos miembros, tenemos

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C_1 = \ln\sqrt{x^2+4} + C_1$$

   En consecuencia,

$$|y| = e^{C_1}\sqrt{x^2+4} \Rightarrow y = \pm e^{C_1}\sqrt{x^2+4} \Rightarrow y = C\sqrt{x^2+4}$$

   Si buscamos la solución particular que cumple una condición inicial dada, por ejemplo, $y(2) = 1$, entonces tenemos $1 = C\sqrt{2^2+4}$, lo que implica que $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. La solución será $y(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^2+4}$. Elevando al cuadrado obtenemos la hipérbola $8y^2 - x^2 = 4$. La solución es la rama positiva $(y > 0)$.



2. Hallar la solución general de la ecuación $x \operatorname{sen} y dx + (x^2+1)\cos y dy = 0$. Determinar la solución particular que cumple la condición inicial $y(1) = \pi/2$.

   Separando variables e integrando, obtenemos

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int -\frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\,dy$$

   Resultando la solución general, en forma implícita,

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|\operatorname{sen} y| + C = 0$$

   La solución particular pedida debe cumplir la ecuación de arriba al sustituir y por $\frac{\pi}{2}$ y x por 1, esto es,

$$\frac{1}{2}\ln(2) + \ln|\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}| + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}\ln 2$$

De modo que

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|\operatorname{sen} y| - \frac{1}{2}\ln 2 = 0$$

es la solución particular buscada.

3. **Ley de enfriamiento de Newton.** La tasa de cambio de temperatura $T(t)$ de un cuerpo con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre T y la temperatura ambiente T_0, que suponemos constante. Escrito en forma de ecuación,

$$\frac{dT}{dt} = k(T_0 - T) \text{ con } K > 0 \text{ constante.}$$

Al sacar de un recipiente un termómetro, éste marca una temperatura de 300 ^{o}F. Tres minutos después, marca 200 ^{o}F ¿Cuánto tardará en enfriarse hasta 71 ^{o}F si la temperatura ambiente es de 70 ^{o} F?

Tenemos $T(0) = 300$, $T(3) = 200$, $T_0 = 70$ y la ecuación

$$\frac{dT}{dt} = k(70 - T)$$

Separando variables y teniendo en cuenta que $T > 70$,

$$\frac{dT}{70-T} = kdt \Rightarrow \int \frac{dT}{70-T} = \int kdt \Rightarrow \ln(T-70) = -kt - C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = e^{-kt}e^{-C_1} + 70 = e^{-kt}C_2 + 70$$

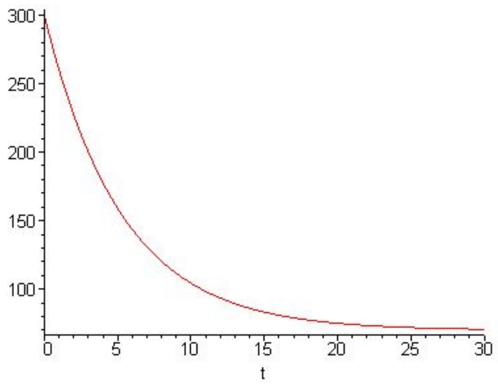
En consecuencia, $T = e^{-kt}C_2 + 70$. Como $T(0) = 300$, entonces $300 = C_2 + 70$, lo que implica que $C_2 = 230$. La solución particular que cumple $T(0) = 300$ es $T = 70 + 230e^{-kt}$. Pero ¿qué valor toma k? Como $T(3) = 200$, resulta

$$200 = 70 + 230e^{-3k} \Rightarrow \frac{13}{23} = e^{-3k} \Rightarrow \ln\left(\frac{13}{23}\right) = -3k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{13}{23}\right) = 0,19018$$

La solución es

$$T(t) = 70 + 230e^{-0,19018t}$$



Veamos para qué valor de t se alcanza la temperatura $T = 71$.

$$71 = 70 + 230e^{-0,19018t} \Rightarrow \frac{\ln(1/230)}{-0,19018} = t \Rightarrow t = 28,6 \text{ minutos}$$

4. **Desintegración radiactiva.** La desintegración radiactiva se caracteriza por la semivida o número de años que deben transcurrir para que se desintegren la mitad de los átomos iniciales de una muestra. La semivida del isótopo Plutonio (Pu^{239}) es de 24360 años. Suponiendo que en el accidente de Chernóbil se liberaron 10 gramos de dicho isótopo, y sabiendo que el ritmo de desintegración es proporcional a la masa ¿cuánto tiempo hará falta para que quede sólo un gramo?

   Si y es la masa de plutonio en gramos, el ritmo de desintegración es proporcional a y, esto es, $\frac{dy}{dt} = ky$ con $k < 0$ constante y el tiempo t medido en años. Separando variables se resuelve la ecuación, obteniéndose $y = Ce^{kt}$, con $C > 0$. Como $y = 10$ para $t = 0$,

$$10 = Ce^0 \Rightarrow C = 10$$

   Como $y = 5$ cuando $t = 24360$, se tiene que

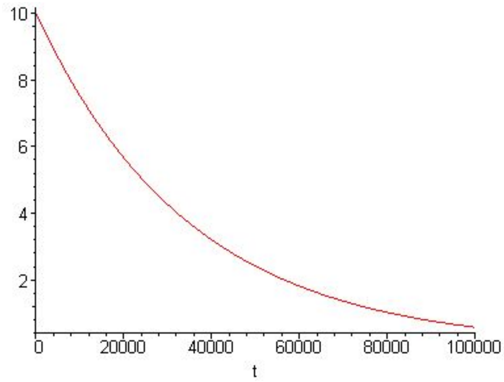
$$5 = 10e^{24360k} \Rightarrow \frac{1}{24360}\ln(1/2) = k \Rightarrow k \approx -0,000028454$$

   En consecuencia, la solución es

$$y = 10e^{-0,000028454t}$$

   Calculemos el valor de t tal que $y = 1$ gramo.

$$1 = 10e^{-0{,}000028454t} \Rightarrow t \approx 80923 \text{ años}$$



Ecuaciones homogéneas.

5. Hallar la solución general de $(x^2 - y^2)dx + 3xydy = 0$.

   Como $M(x,y) = (x^2 - y^2)$ y $N(x,y) = 3xy$ son ambas homogéneas de grado 2, hacemos $y = vx$. Así, $dy = xdv + vdx$, de modo que, sustituyendo y y dy en la ecuación, obtenemos

$$(x^2 - v^2x^2)dx + 3x(vx)(xdv + vdx) = 0 \Rightarrow (x^2 + 2v^2x^2)dx + 3x^3vdv = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(1 + 2v^2)dx + x^2(3vx)dv = 0$$

   Esta segunda ecuación es de variables separables. Dividiendo entre x^2 y separando variables, queda

$$(1 + 2v^2)dx = -3vxdv \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{-3v}{1 + 2v^2} dv \Rightarrow$$

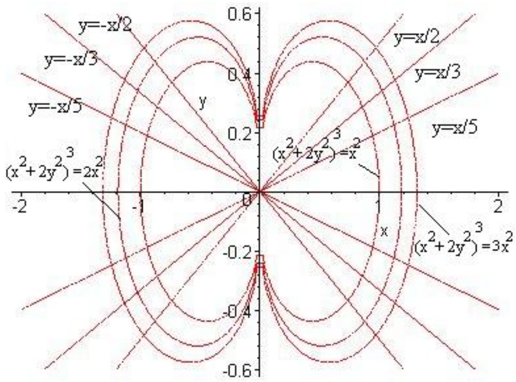
$$\Rightarrow \ln|x| = -\frac{3}{4}\ln(1 + 2v^2) + C_1 \Rightarrow 4\ln|x| = -3\ln(1 + 2v^2) + \ln|C_2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x^4 = \ln\left|C_2(1 + 2v^2)^{-3}\right| \Rightarrow x^4 = C_2(1 + 2v^2)^{-3}$$

   Una vez resuelta la segunda ecuación, se deshace el cambio $v = \frac{y}{x}$, para obtener

$$x^4 = C_2\left[1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{-3} \Rightarrow (x^2 + 2y^2)^3 = Cx^2$$

   Una propiedad interesante de las ecuaciones homogéneas (1) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es que $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$ es una función homogénea de grado 0, de modo que $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, esto es, las rectas que pasan por el origen son *isoclinas* de (1) (las pendientes y' de las soluciones de (1) son constantes a lo largo de cada una de estas rectas). La siguiente figura ilustra esta situación con el último ejemplo.



6. Hallar la solución general de $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

   Tenemos $xdy - \left(y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x}\right) dx = 0$. La ecuación es homogénea, ya que $M(x,y) = -\left(y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x}\right)$ y $N(x,y) = x$ son ambas homogéneas de grado 1. Hacemos el cambio $y = vx$. Así, $dy = xdv + vdx$, de modo que, sustituyendo y y dy en la ecuación, obtenemos

$$x(xdv + vdx) - \left(vx + x \operatorname{tg} \frac{vx}{x}\right) dx = 0 \Rightarrow (-x \operatorname{tg} v)dx + x^2 dv = 0$$

   Ésta es una ecuación de variables separables. Resolvámosla:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} v}\, dv \Rightarrow \ln|x| = \ln|\operatorname{sen} v| + C \Rightarrow |x| = e^C |\operatorname{sen} v|$$

   Deshaciendo el cambio, nos queda

$$|x| = D \left|\operatorname{sen} \frac{y}{x}\right| \text{ con } D > 0$$

   Si $x > 0$ y $\operatorname{sen} \frac{y}{x} > 0$, entonces desaparecen los valores absolutos y queda

$$x = D \operatorname{sen} \frac{y}{x} \Rightarrow \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{D} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{D}$$

Ecuaciones diferenciales exactas. Factores integrantes.

7. Resolver la ecuación diferencial exacta $(\cos x - x \operatorname{sen} x + y^2)dx + 2xydy = 0$. Hallar la solución particular que satisface la condición inicial $y = 1$ en $x = \pi$.

   Efectivamente, es exacta, ya que $M_y = 2y = N_x$. Buscamos una solución del tipo $f(x,y) = C$ con $f_x = M$ y $f_y = N$. Como N es más sencilla que M, integramos N para determinar f:

$$f(x,y) = \int N(x,y)\,dy = \int 2xy\,dy = xy^2 + g(x)$$

Queda determinar quién es $g(x)$. Como

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[xy^2 + g(x)] = y^2 + g'(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x + y^2,$$

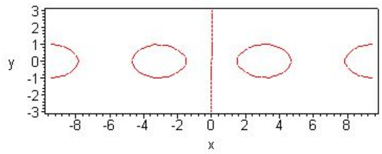
llegamos a la conclusión de que $g'(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x$. Entonces

$$g(x) = \int (\cos x - x \operatorname{sen} x)dx = x \cos x + C$$

La última igualdad se obtiene integrando por partes. Esto implica que $f(x,y) = xy^2 + x\cos x + C$, de modo que la solución general de la ecuación es

$$xy^2 + x\cos x = C$$

La solución particular que pasa por $(x,y) = (\pi, 1)$ exige que $\pi + \pi\cos\pi = C$, de modo que $C = 0$, y la solución es $xy^2 + x\cos x = 0$. Su gráfica es la siguiente:



8. Resolver la ecuación diferencial $\left(\frac{x}{y^2} + x\right) dx - \left(\frac{x^2}{y^3} + y\right) dy = 0.$

Tenemos $M(x,y) = \frac{x}{y^2} + x$ y $N(x,y) = -\frac{x^2}{y^3} - y$. Entonces

$$M_y = -2y^{-3}x \text{ y } N_x = -\frac{2x}{y^3},$$

de modo que la ecuación es exacta. Buscamos una solución del tipo $f(x,y) = C$, con $f_x = M$ y $f_y = N$. Integramos M para determinar f:

$$f(x,y) = \int f_x(x,y)\,dx = \int M(x,y)\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{x}{y^2} + x \right) dx = \frac{x^2}{2y^2} + \frac{x^2}{2} + g(y)$$

Queda determinar quién es $g(y)$. Como

$$f_y(x, y) = N(x, y) = -\frac{x^2}{y^3} - y$$

y

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x^2}{2y^2} + \frac{x^2}{2} + g(y) \right] = -x^2 y^{-3} + g'(y),$$

resulta que

$$g'(y) = -y \Rightarrow g(y) = \frac{-y^2}{2} + C$$

Entonces, $f(x, y) = \frac{x^2}{2y^2} + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + C$, con lo que la solución es

$$\frac{x^2}{2y^2} + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = C$$

9. Resolver la ecuación diferencial $(y^2 - x)dx + 2ydy = 0$.

   Tenemos $M_y = 2y$, $N_x = 0$, de modo que la ecuación no es exacta. Por otro lado,

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2y}{2y} = 1 = h(x),$$

   con lo que $\mu(x) = e^{\int 1\, dx} = e^x$ es un factor integrante. Multiplicando la ecuación por e^x obtendremos la ecuación exacta

$$(y^2 e^x - xe^x)dx + 2ye^x dy = 0$$

   Ahora tenemos $M(x, y) = y^2 e^x - xe^x$ y $N(x, y) = 2ye^x$ y se cumple $M_y = 2ye^x = N_x$. Buscamos una solución $f(x, y) = C$ con $f_x = M$ y $f_y = N$.

$$f(x, y) = \int f_y \, dy = \int N \, dy = \int 2ye^x \, dy = y^2 e^x + g(x)$$

   Además,

$$f_x(x,y) = y^2e^x + g'(x) \text{ y } f_x(x,y) = M(x,y) = y^2e^x - xe^x$$

Entonces $g'(x) = -xe^x$, de manera que, integrando por partes, se obtiene $g(x) = -xe^x + e^x + C$. Resulta $f(x,y) = y^2e^x - xe^x + e^x + C$. La solución general de la ecuación es

$$y^2e^x - xe^x + e^x = C$$

10. Resolver la ecuación diferencial $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$.

Tenemos $M_y = 2y$, $N_x = y$, de modo que la ecuación no es exacta. Por otro lado,

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} = h(x),$$

con lo que $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln x} = x$ es un factor integrante. Multiplicando la ecuación por x obtendremos la ecuación exacta

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2ydy = 0$$

Ahora tenemos $M(x,y) = x^3 + xy^2 + x^2$ y $N(x,y) = x^2y$ y se cumple $M_y = 2xy = N_x$. Buscamos una solución $f(x,y) = C$ con $f_x = M$ y $f_y = N$.

$$f(x,y) = \int f_x\,dx = \int M\,dy = \int (x^3 + xy^2 + x^2)\,dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + g(y)$$

Además,

$$f_y(x,y) = yx^2 + g'(y) \text{ y } f_y(x,y) = N(x,y) = x^2y,$$

de modo que $g'(y) = 0$, esto es, $g(y) = C$ constante. Resulta $f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$. La solución general de la ecuación es

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C$$

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
Ecuación de Bernoulli.

11. Hallar la solución general de $xy' - 2y = x^2$.

    La forma canónica o normal es $y' - \left(\frac{2}{x}\right) y = x$. Tenemos $P(x) = -2/x$, de modo que

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{-\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2}$$

    es un factor integrante. Multiplicamos la ecuación en forma canónica por el factor integrante y obtenemos

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} y = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{y}{x^2}\right] = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y}{x^2} = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x^2} = \ln|x| + C \Rightarrow y = x^2(\ln|x| + C)$$

12. **Problema de mezclas.** Un depósito contiene 50 litros de una solución, compuesta por 90 % de agua y 10 % de alcohol. Otra solución, con 50 % de cada sustancia, se va añadiendo al depósito a razón de 4 litros por minuto, al tiempo que el depósito se va vaciando a razón de 5 litros por minuto. Supuesto que el contenido del depósito está siendo removido constantemente, ¿cuánto alcohol hay a los 10 minutos?

    Sea $x(t)$ el número de litros de alcohol que hay en el instante t en el depósito. Sabemos que $x(0) = 5$. El número de litros de solución en un instante t es $50 - t$. Veamos los litros de alcohol que se pierden y los que se ganan por minuto:

    Al perderse 5 litros de solución por minuto, resulta que se pierden

$$5\frac{x(t)}{50 - t}$$

    litros de alcohol por minuto. Por otro lado se ganan 2 litros de alcohol por minuto, de modo que el ritmo de cambio de alcohol es

$$\frac{dx}{dt} = 2 - \left(\frac{5}{50 - t}\right) x(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \left(\frac{5}{50 - t}\right) x(t) = 2$$

    Esta ecuación es lineal, con $P(t) = \frac{5}{50-t}$, de modo que

$$\int P(t)\,dt = \int \frac{5}{50 - t}\,dt = -5\ln|50 - t| = -5\ln(50 - t)$$

La última igualdad viene de observar que $t < 50$. Concluimos que

$$e^{\int P(t)\,dt} = e^{-5\ln(50-t)} = \frac{1}{(50-t)^5}$$

La solución general es

$$\frac{x(t)}{(50-t)^5} = \int \frac{2}{(50-t)^5}\,dt = \frac{1}{2(50-t)^4} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{50-t}{2} + C(50-t)^5$$

Como $y(0) = 5$, se tiene que

$$5 = 25 + C(50)^5 \Rightarrow C = -\frac{20}{50^5}$$

La solución particular es

$$x(t) = \frac{50-t}{2} - 20\left(\frac{50-t}{50}\right)^5$$

Calculemos el alcohol que queda en el depósito a los 10 minutos, esto es, $x(10)$.

$$x(10) = \frac{50-10}{2} - 20\left(\frac{50-10}{50}\right)^5 = 13,45 \text{ litros}$$

que, en porcentaje, es un $100\dfrac{13,45}{50-10}\,\% = 33,6\,\%$ de alcohol.

13. Hallar la solución general de $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$.
Tenemos $n = -3$, de modo que $v = y^4$, lo que implica que $y = v^{1/4}$. Además, $v' = 4y^3y'$, con lo que $y' = \dfrac{v'}{4y^3} = \dfrac{v'}{4v^{3/4}}$. Sustituyendo en la ecuación por y e y', tenemos

$$\frac{v'}{4v^{3/4}} + xv^{1/4} = xe^{-x^2}v^{-3/4}$$

Multiplicando la ecuación por $4v^{3/4}$ para dejar v' solo, obtenemos

$$v' + 4xv = 4xe^{-x^2}$$

Esta ecuación es lineal. Resolviéndola, se obtiene $v = 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2}$. Deshaciendo el cambio, queda $y^4 = 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2}$, que es la solución buscada.

Ecuaciones diferenciales lineales de 2º orden

14. Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales:

1. $y'' + 6y' + 12y = 0$ 2. $y'' - 4y = 0$

1. Resolvamos $\lambda^2 + 6\lambda + 12 = 0$.

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{-12}}{2} = -3 \pm \sqrt{-3} = -3 \pm \sqrt{3}i$$

Por tanto, $\alpha = -3$ y $\beta = \sqrt{3}$, con lo que la solución general es

$$y = C_1 e^{-3x} \cos \sqrt{3}x + C_2 e^{-3x} \operatorname{sen} \sqrt{3}x$$

2. Resolvamos $\lambda^2 - 4 = 0$. Resulta $\lambda = \pm 2$, con lo que la solución general es

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

15. Resolver la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = 2, y'(0) = 1$.

Resolvamos $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Como $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$, resulta que $\lambda = -2$ es la única raíz (real y doble).

Por tanto, la solución general es

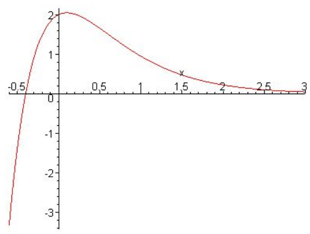
$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

Como $y = 2$ en $x = 0$, tenemos $2 = C_1 + 0C_2 = C_1$. Además, $y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2(-2xe^{-2x} + e^{-2x})$. Como $y'(0) = 1$, al sustituir, tenemos

$$1 = -2(2)(1) + C_2[-2(0)(1) + 1] \Rightarrow 5 = C_2$$

La solución particular es

$$y = 2e^{-2x} + 5xe^{-2x}$$



16. Un peso de 49 N produce en un muelle, del que está suspendido, un desplazamiento de 5 cm. hacia abajo. Se tira entonces del peso hasta desplazarlo 5 cm más hacia abajo y se suelta a continuación. Hallar la ecuación que describe la posición del objeto en función del tiempo t.

    Estamos ante un movimiento vibratorio libre no amortiguado. Por la ley de Hooke, $F_r = mg = 49 = ks = k(0,05)$, de modo que $k = 980$. La masa m es $m = w/g = 49/9,8 \approx 5$. De aquí,

    $$x'' + \frac{980}{5}x = 0$$

    es la ecuación de nuestro sistema con condiciones iniciales $x(0) = 0,05$ y $x'(0) = 0$.

    La ecuación característica es $\lambda^2 + \frac{980}{5} = 0$. Al resolver, obtenemos $\lambda = \pm 14i$. En consecuencia, la solución de la ecuación es del tipo

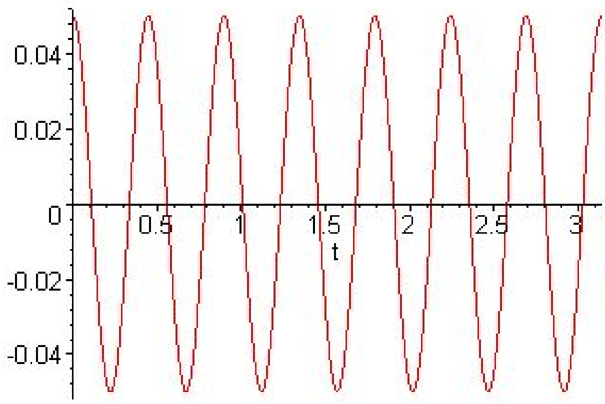
    $$x(t) = C_1 \cos 14t + C_2 \operatorname{sen} 14t$$

    Entonces, $0,05 = C_1(1) + C_2(0)$ y esto implica que $C_1 = 0,05$. Además,

    $$x'(t) = -14C_1 \operatorname{sen} 14t + 14C_2 \cos 14t \Rightarrow 0 = 14C_2(1) \Rightarrow C_2 = 0$$

    La solución buscada es

    $$x(t) = 0,05 \cos 14t$$



17. Hallar la ecuación que describe la posición del objeto del ejercicio anterior, pero considerando el sistema sometido a una fuerza proporcional a la velocidad $x'(t)$ dada por la constante $\beta = 10$.

La ecuación resultante es

$$x'' + \frac{10}{5}x' + \frac{980}{5}x = 0$$

sometida a las condiciones iniciales $x(0) = 0,05$ y $x'(0) = 0$. La ecuación característica es $\lambda^2 + 2\lambda + 196 = 0$ y, resolviendo, obtenemos $\lambda = -1 \pm \sqrt{195}i$. La solución general es

$$x(t) = C_1 e^{-t}\cos(\sqrt{195}t) + C_2 e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{195}t)$$

Como $x(0) = 0,05$, tenemos $0,05 = C_1$. Por otro lado,

$$x'(t) = C_1[-e^{-t}\cos(\sqrt{195}t) - e^{-t}\sqrt{195}\operatorname{sen}(\sqrt{195}t)] +$$

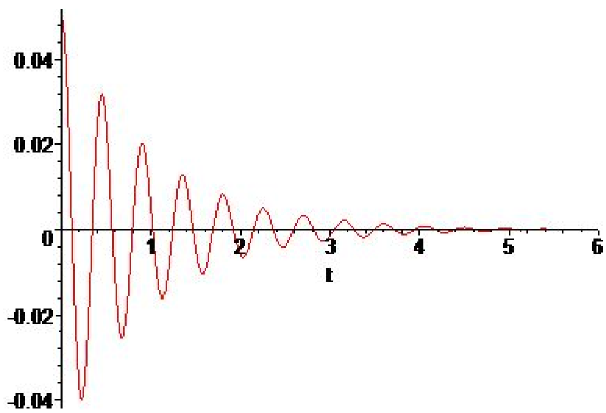
$$+ C_2[-e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{195}t) + e^{-t}\sqrt{195}\cos(\sqrt{195}t)]$$

Como $x'(0) = 0$, resulta

$$0 = C_1[-1] + C_2[\sqrt{195}] \Rightarrow 0 = -0,05 + C_2\sqrt{195} \Rightarrow C_2 = \frac{0,05}{\sqrt{195}}$$

En consecuencia, la solución es

$$x(t) = 0,05e^{-t}\cos(\sqrt{195}t) + \frac{0,05}{\sqrt{195}}e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{195}t)$$



Método de los coeficientes indeterminados.

18. Calcular la solución general de la ecuación (1) $\quad y'' - 2y' - 3y = 2\operatorname{sen} x$.

El cálculo de la solución general y_h de la ecuación homogénea $y'' - 2y' - 3y = 0$ nos da

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

Tenemos $f(x) = 2\operatorname{sen} x$. Elegimos $y_p = A\cos x + B\operatorname{sen} x$. Entonces,

$$\begin{aligned} y_p' &= -A\operatorname{sen} x + B\cos x \\ y_p'' &= -A\cos x - B\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (1), queda

$$(-4A - 2B)\cos x + (2A - 4B)\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} x$$

Igualando coeficientes de términos análogos, obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -4A - 2B & = & 0 \\ 2A - 4B & = & 2 \end{array} \right.$$

con soluciones $A = 1/5$ y $B = -2/5$. En consecuencia,

$$y_p = \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\operatorname{sen} x$$

Como la solución general de (1) es $y = y_h + y_p$, tenemos

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\operatorname{sen} x$$

19. Calcular la solución general de la ecuación (1) $\quad y'' - 2y' = x + 2e^x$.

El cálculo de la solución general y_h de la ecuación homogénea $y'' - 2y' = 0$ nos daba

$$y_h = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Tenemos $f(x) = x + 2e^x$. La primera elección de y_p es $y_p = (A + Bx) + (Ce^x)$. Sin embargo, como y_h ya contiene un término constante C_1, éste debe desaparecer de y_p. Para ello basta multiplicar la parte polinómica $(A + Bx)$ de y_p por x. Entonces, obtenemos una nueva y_p

$$y_p = Ax + Bx^2 + Ce^x$$

Esta candidata a solución particular no produce solapamiento con los sumandos de y_h. Calculemos los valores de A, B, C.

$$\begin{array}{rcl} y_p' & = & A + 2Bx + Ce^x \\ y_p'' & = & 2B + Ce^x \end{array}$$

Sustituimos en la ecuación (1) y obtenemos

$$(2B - 2A) - 4Bx - Ce^x = x + 2e^x$$

Igualando los coeficientes de los términos idénticos obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2B - 2A & = & 0 \\ -4B & = & 1 \\ -C = 2 & & \end{array} \right.$$

con soluciones $A = B = -\frac{1}{4}$ y $C = -2$. En consecuencia,

$$y_p = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - 2e^x$$

Como la solución general de (1) es $y = y_h + y_p$, tenemos

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - 2e^x$$

Método de variación de las constantes.

20. Resolver la ecuación $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2x}$, $x > 0$.

La solución de la parte homogénea es $y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x$, con lo que $y_1 = e^x$ y $y_2 = xe^x$. La solución particular será de la forma $y_p = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x$. Calculemos $u_1(x)$ y $u_2(x)$. Para ello, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1' e^x + u_2' x e^x & = & 0 \\ u_1' e^x + u_2'(xe^x + e^x) & = & \frac{e^x}{2x} \end{array} \right.$$

Restando las dos ecuaciones, obtenemos $u_2' = \frac{1}{2x}$. Sustituyendo en la primera ecuación, resulta $u_1' = -\frac{1}{2}$. Integrando, resulta

$$u_1 = -\frac{x}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{2}\ln x = \ln\sqrt{x}$$

De modo que $y_p = -\frac{1}{2}xe^x + (\ln\sqrt{x})xe^x$, con lo que la solución general es

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{1}{2} x e^x + (\ln \sqrt{x}) x e^x$$

21. Hallar la solución general de la ecuación $y'' - y' = e^{2x} \operatorname{sen}(e^x)$.

    La solución de la parte homogénea es $y_h = C_1 + C_2 e^x$, con lo que $y_1 = 1$ e $y_2 = e^x$. Entonces, la solución particular será de la forma $y_p = u_1(x) + u_2(x) e^x$. Calculemos $u_1(x)$ y $u_2(x)$. Para ello, resolvemos el sistema de ecuaciones

    $$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1' + u_2' e^x & = & 0 \\ 0 + u_2'(e^x) & = & e^{2x} \operatorname{sen}(e^x) \end{array} \right.$$

    Despejando del sistema lineal las incógnitas u_1' y u_2', obtenemos $u_2' = e^x \operatorname{sen}(e^x)$ y $u_1' = -e^{2x} \operatorname{sen}(e^x)$. Integrando, resulta

    $$u_2 = \int e^x \operatorname{sen}(e^x)\, dx = -\cos(e^x)$$

    y

    $$u_1 = -\int e^{2x} \operatorname{sen}(e^{2x})\, dx = e^x \cos(e^x) - \operatorname{sen}(e^x)$$

    La última igualdad se obtiene integrando por partes ($u = e^x$, $dv = e^x \operatorname{sen}(e^x) dx$).

    En consecuencia,

    $$y_p = 1(e^x \cos(e^x) - \operatorname{sen}(e^x)) - e^x \cos(e^x) = -\operatorname{sen}(e^x),$$

    con lo que la solución general es

    $$y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^x - \operatorname{sen}(e^x)$$

22. Dado el sistema vibratorio libre no amortiguado del ejercicio 16, pero sometido a una fuerza externa $f(t) = \operatorname{sen}(\sqrt{196} t)$, calcúlese la ecuación que describe la posición del objeto en función del tiempo t.

    La ecuación es

    $$x'' + \frac{980}{5} x = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{196} t)}{5},$$

    esto es,

    $$x'' + 196x = \frac{\operatorname{sen}(14t)}{5},$$

Al resolver la parte homogénea (véase el ejercicio 16), obtenemos

$$x_h(t) = C_1 \cos 14t + C_2 \operatorname{sen} 14t$$

La solución particular se calcula aplicando alguna de las técnicas comentadas, por ejemplo, el método de los coeficientes indeterminados (teniendo en cuenta que habrá solapamiento), y se obtiene:

$$x_p(t) = At \cos 14t + Bt \operatorname{sen} 14t$$

Al derivar y sustituir en la ecuación, se tiene que $A = -\frac{1}{140}$ y $B = 0$, de modo que:

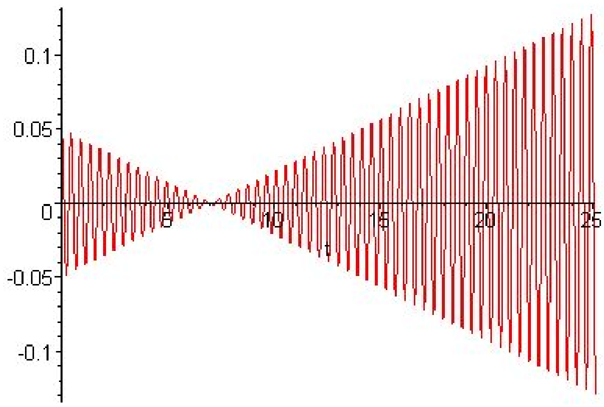
$$x_p(t) = -\frac{1}{140} t \cos(14t)$$

La solución general de la ecuación será

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \cos(14t) + C_2 \operatorname{sen}(14t) - \frac{1}{140} t \cos(14t)$$

Despejando C_1 y C_2 a partir de las condiciones iniciales, la solución del problema de valor inicial planteado será:

$$x(t) = 0,05 \cos(14t) + \frac{1}{1960} \operatorname{sen}(14t) - \frac{1}{140} t \cos(14t)$$



En la figura se muestra un efecto interesante que produce la acción de la fuerza externa periódica $f(t)$ sobre el sistema masa-resorte. En un principio, la amplitud de las oscilaciones decrece hasta hacerse nula para, posteriormente, empezar a crecer indefinidamente haciendo que, con un valor de t suficientemente amplio, el sistema no soporte la tensión y acabe colapsándose. Este fenómeno es conocido como resonancia, y se da cuando la frecuencia natural del sistema masa-resorte, $\omega = \sqrt{k/m}$, coincide con la frecuencia de la fuerza periódica externa al mismo, $f(t)$. De hecho, cuando ambas frecuencias son suficientemente próximas, aunque no coincidan, dan lugar a movimientos periódicos de amplitudes acotadas, pero muy grandes, que el sistema no puede absorber, acabando por colapsarse.