1. EJERCICIOS

Variables separables.

1. Hallar la solución general de la ecuación de variables separables $(x^2+4)\frac{dy}{dx}=xy$.

2. Hallar la solución general de la ecuación $x \operatorname{sen} y dx + (x^2+1)\cos y dy = 0$. Determinar la solución particular que cumple la condición inicial $y(1)=\pi/2$.

3. **Ley de enfriamiento de Newton.** La tasa de cambio de temperatura $T(t)$ de un cuerpo con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre T y la temperatura ambiente T_0, que suponemos constante. Escrito en forma de ecuación,

$$\frac{dT}{dt}=k(T_0-T) \text{ con } K>0 \text{ constante.}$$

Al sacar de un recipiente un termómetro, éste marca una temperatura de 300 ºF. Tres minutos después, marca 200 ºF ¿Cuánto tardará en enfriarse hasta 71 ºF si la temperatura ambiente es de 70 º F?

4. **Desintegración radiactiva.** La desintegración radiactiva se caracteriza por la semivida o número de años que deben transcurrir para que se desintegren la mitad de los átomos iniciales de una muestra. La semivida del isótopo Plutonio (Pu^{239}) es de 24360 años. Suponiendo que en el accidente de Chernóbil se liberaron 10 gramos de dicho isótopo, y sabiendo que el ritmo de desintegración es proporcional a la masa, ¿cuánto tiempo hará falta para que quede sólo un gramo?

Ecuaciones homogéneas.

5. Hallar la solución general de $(x^2-y^2)dx+3xydy=0$.

6. Hallar la solución general de $xy'-y=x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

Ecuaciones diferenciales exactas. Factores integrantes.

7. Resolver la ecuación diferencial exacta $(\cos x - x\operatorname{sen} x + y^2)dx + 2xydy = 0$. Hallar la solución particular que satisface la condición inicial $y=1$ en $x=\pi$.

8. Resolver la ecuación diferencial $\left(\frac{x}{y^2}+x\right)dx-\left(\frac{x^2}{y^3}+y\right)dy=0$.

9. Resolver la ecuación diferencial $(y^2-x)dx+2ydy=0$.

10. Resolver la ecuación diferencial $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$.

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
Ecuación de Bernoulli.

11. Hallar la solución general de $xy' - 2y = x^2$.

12. **Problema de mezclas.** Un depósito contiene 50 litros de una solución, compuesta por 90 % de agua y 10 % de alcohol. Otra solución, con 50 % de cada sustancia, se va añadiendo al depósito a razón de 4 litros por minuto, al tiempo que el depósito se va vaciando a razón de 5 litros por minuto. Supuesto que el contenido del depósito está siendo removido constantemente, ¿cuánto alcohol hay a los 10 minutos?

13. Hallar la solución general de $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$.

Ecuaciones diferenciales lineales de 2º orden

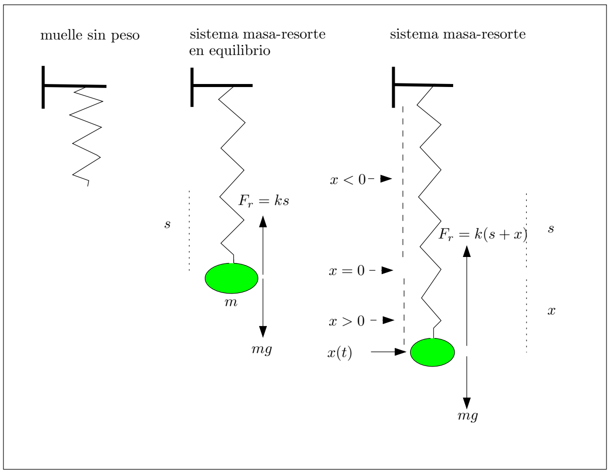
14. Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales:
    1. $y'' + 6y' + 12y = 0$ 2. $y'' - 4y = 0$

15. Resolver la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = 2, y'(0) = 1$.

    Movimiento vibratorio libre. Según la ley de Hooke, un muelle que se estira o comprime s unidades respecto de su longitud natural, tiende a recuperarla con una fuerza F_r proporcional a s (y opuesta a la dirección de alargamiento), esto es, $F_r(s) = ks$, donde k es una constante que depende del muelle y que indica su rigidez. Si se sujeta un objeto de masa m al extremo libre de un muelle colgado, se produce un estiramiento en el muelle hasta encontrar una posición de equilibrio, en la que actúan dos fuerzas opuestas que se cancelan: El peso $w = mg$ y la fuerza de restitución del muelle $F_r = ks$. Se tiene $mg = ks$.

    Movamos el sistema de su posición de equilibrio, de modo que en el momento t, la posición de la masa sea $x(t)$. Entonces, la fuerza total actuando sobre el sistema es, por la segunda ley de Newton, $F = ma = mx''(t)$, que se escribe como suma de fuerzas de sentidos opuestos (la de restitución del muelle y el peso)

$$mx'' = -k(s + x) + mg = -ks + mg - kx = -kx$$



Así queda la ecuación de un sistema vibratorio libre no amortiguado:

$$mx'' = -kx \Rightarrow x'' + \frac{k}{m}x = 0 \text{ ó } x'' + \omega^2 x = 0 \text{ con } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Si el sistema está sometido a una fuerza proporcional a la velocidad $x'(t)$ (fuerza de amortiguamiento), por ejemplo, si el muelle está sumergido en agua, la ecuación resultante es

$$mx'' = -kx - \beta x',$$

siendo $\beta > 0$ la constante de amortiguamiento. La ecuación resultante es la ecuación del movimiento vibratorio libre amortiguado:

$$x'' + \frac{\beta}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

16. Un peso de 49 N produce en un muelle, del que está suspendido, un desplazamiento de 5 cm. hacia abajo. Se tira entonces del peso, hasta desplazarlo 5 cm más hacia abajo, y se suelta a continuación. Hallar la ecuación que describe la posición del objeto en función del tiempo t.

17. Hallar la ecuación que describe la posición del objeto del ejercicio anterior, pero considerando el sistema sometido a una fuerza proporcional a la velocidad $x'(t)$ dada por la constante $\beta = 10$.

Método de los coeficientes indeterminados.

18. Calcular la solución general de la ecuación (1) $\quad y'' - 2y' - 3y = 2 \operatorname{sen} x$.

19. Calcular la solución general de la ecuación (1) $\quad y'' - 2y' = x + 2e^x$.

Método de variación de las constantes.

20. Resolver la ecuación $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2x}$, $x > 0$.

21. Hallar la solución general de la ecuación $y'' - y' = e^{2x} \operatorname{sen}(e^x)$.

    Movimiento vibratorio forzado. Resonancia. Un movimiento vibratorio es forzado si, en contra de lo que ocurre con el caso libre, existe una fuerza externa al sistema $f(t)$ que actúa sobre la masa y en la dirección del movimiento. La ecuación diferencial resultante es

$$mx'' = -kx - \beta x' + f(t) \Rightarrow x'' + \frac{\beta}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{f(t)}{m}$$

    Si suponemos que el movimiento es no amortiguado, entonces $\beta = 0$ y la ecuación es

$$x'' + \frac{k}{m}x = \frac{f(t)}{m}$$

22. Dado el sistema vibratorio libre no amortiguado del ejercicio 16, pero sometido a una fuerza externa $f(t) = \operatorname{sen}(\sqrt{195}t)$, calcúlese la ecuación que describe la posición del objeto en función del tiempo t.