1. DERIVACIÓN

1.1. DEFINICIONES Y RESULTADOS PRINCIPALES

Definición 1.1. *Derivada.*

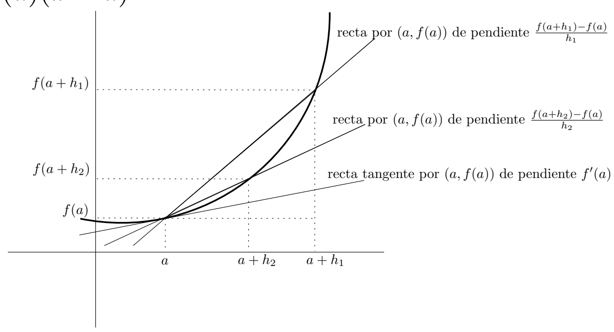
Sea f una función definida en un intervalo abierto I con $a \in I$. Decimos que f es derivable en a si existe y es real el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \in \mathbb{R}$$

A $f'(a)$ se le denomina derivada de f en a y también se denota por

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

La derivada $f'(a)$ mide la variación de f respecto de la variación de x en el punto a. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es precisamente $m = f'(a)$. La ecuación de dicha recta es, por tanto, $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.



Si f está definida en un intervalo a la derecha de a, $[a, a+\epsilon)$, o a la izquierda de a, $(a-\epsilon, a]$, los números

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

en caso de existir, se denominan derivada por la derecha de a y derivada por la izquierda de a, respectivamente.

La función f es derivable en un intervalo abierto I si lo es en todos sus puntos. Si f es derivable en I, la función que en cada punto $x \in I$ toma el valor $f'(x)$ se denomina función derivada *de f y se denota por $f' = \frac{df}{dx}$.*

Proposición 1.1. *La derivada $f'(a)$ existe si y sólo si existen y son iguales $f'_+(a) = f'_-(a)$.*

Teorema 1.1. *Si f es derivable en a, entonces es continua en a.*

Definición 1.2. *Diferencial.*

Sea $y = f(x)$ una función derivable en un punto x_0. Si $P = (x_0, f(x_0))$ es el punto correspondiente de la gráfica, la recta tangente a la misma en dicho punto tiene pendiente $f'(x_0)$ y su ecuación es $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Por diferenciales dx y dy (diferencial de x y diferencial de y) entendemos los incrementos en las variables x e y asociados a esta recta tangente. Así, dx es un incremento Δx en la variable independiente x, esto es,

$$dx = \Delta x$$

La diferencial dy de la variable dependiente y es el correspondiente incremento en y en la recta tangente, esto es,

$$dy = f'(x_0)dx$$

Obsérvese que se puede escribir la igualdad anterior en la forma $\frac{dy}{dx} = f'(x_0)$. De modo que, con esta notación, la derivada aparece escrita como un cociente.

Téngase en cuenta que el incremento real en la y cuando la x varía una cantidad pequeña $\Delta x = dx$ es

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx dy = f'(x_0)dx.$$

De modo que dy es una buena aproximación al cambio real en y, Δy, siempre que Δx sea pequeño.

Propiedades de las derivadas.

- Sean f, g derivables en a y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces $f \pm g$, cf, fg también son derivables en a con

  $$\begin{array}{l} (f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a) \\ (cf)'(a) = cf'(a) \\ (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \end{array}$$

  Si además $g(a) \neq 0$, entonces f/g es derivable en a y

  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

- Regla de la cadena. Si f es derivable en a y g lo es en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es derivable en a y

  $$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

- Derivada de la función inversa. Sea f derivable en $a \in (c,d)$ con $f'(a) \neq 0$. Entonces existe f^{-1} en un entorno de $f(a)$ y

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

- Derivación implícita. Cuando en una ecuación implícita $F(x,y) = 0$ no es sencillo despejar y en función de x y se desea calcular la derivada $y'(x) = f'(x)$, se realiza la derivación implícita. Veámoslo con un ejemplo.

  Hallemos $\frac{dy}{dx}$ sabiendo que $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$. Derivamos ambos miembros de la igualdad con respecto a x:

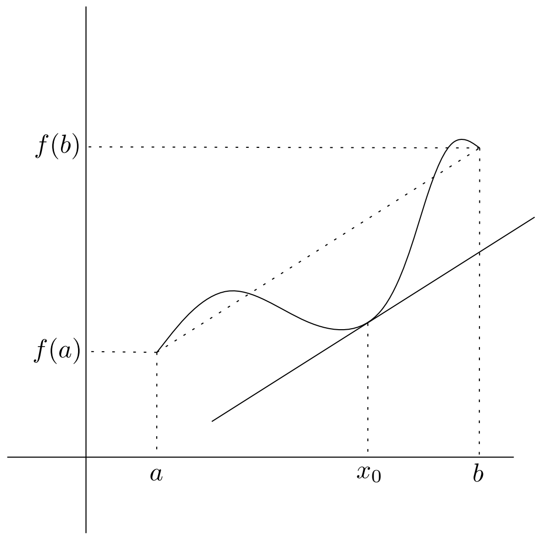
$$\frac{d}{dx}[y^3 + y^2 - 5y - x^2] = \frac{d}{dx}[-4] \Rightarrow 3y^2y' + 2yy' - 5y' - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(3y^2 + 2y - 5) = 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

Teorema 1.2. *Teorema del valor medio.*

Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Teorema 1.3. *Teorema del valor medio generalizado de Cauchy.*

Si f y g son continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b) y, además, $g(a) \neq g(b)$, existe algún $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Teorema 1.4. *Regla de L'Hôpital.*

Sean f, g derivables en un entorno abierto (a, b) que contiene a c (salvo, quizá, en el propio c). Si $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ y existe el límite $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

El enunciado es válido también cuando

$$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty \ y \ \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty.$$

El resultado se formula de modo análogo para $c = \pm\infty$.

Si en la expresión $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se vuelve a presentar una indeterminación del tipo $0/0$ ó ∞/∞, se puede volver a aplicar la regla de L'Hôpital (si se cumplen las hipótesis de aplicabilidad).

1.2. APROXIMACIONES POR POLINOMIOS

Teorema 1.5. *Si f es una función con derivadas hasta el orden n en un punto a, entonces existe un polinomio (único) $P(x)$ de grado menor o igual que n tal que*

$$P(a) = f(a),\ P'(a) = f'(a),\ \ldots,\ P^{n)}(a) = f^{n)}(a).$$

Dicho polinomio viene determinado por la expresión

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Al polinomio anterior se le llama polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto a. *Se denota por $P_{n,a}(x)$. Además, se tiene que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Definición 1.3. *Si f es una función para la cual existe $P_{n,a}(x)$, se define el* resto de Taylor de orden n de f en a *como*

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x)$$

Teorema 1.6. *Teorema de Taylor.*

Si las funciones $f, f', \dots, f^{n+1)}$ están definidas sobre $[a,x]$, existe $t \in (a,x)$ tal que el resto de Taylor de orden n de f en a viene dado por

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Ésta es la forma de Lagrange del resto. *La fórmula de Taylor se escribe como*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n +$$

$$+\frac{f^{n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x).$$

Cuando la fórmula de Taylor se desarrolla en el punto $a = 0$, obtenemos la fórmula de McLaurin

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{n+1)}(t)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

El polinomio de Taylor de orden n es el polinomio de grado menor o igual que n que mejor aproxima a f en un entorno de a (tiene las mismas derivadas que la función hasta el orden n en el punto a). El error $|R_{n,a}(x)| = |f(x) - P_{n,a}(x)|$ es el valor absoluto del resto y, en un sentido amplio, será tan pequeño como sea necesario, siempre que se escoja n suficientemente grande.

Desarrollos de Taylor más frecuentes.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n$
$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R_n$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n$

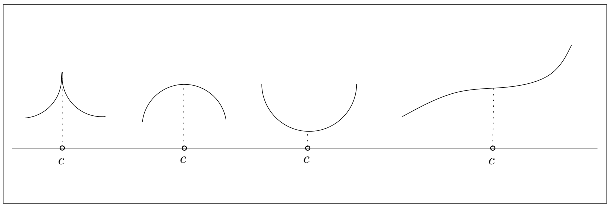
1.3. ESTUDIO GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN

Definición 1.4. *Sea f definida en un intervalo I con $c \in I$. Entonces $f(c)$ es el valor mínimo (máximo) de f en I si $f(c) \le f(x)$ ($f(c) \ge f(x)$) para todo $x \in I$.*

Los valores máximo y mínimo de una función en un intervalo I, de existir, son los llamados valores extremos de la función en dicho intervalo (también llamados máximo y mínimo absolutos en I).

Definición 1.5. *Si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c y en el que $f(c)$ es máximo (mínimo), entonces $f(c)$ se llama máximo relativo (mínimo relativo) de f.*

Definición 1.6. *Un punto $c \in I$ es un punto crítico de f si f no es derivable en c ó $f'(c) = 0$.*



Observación 1.1. *Los extremos relativos se alcanzan en los puntos críticos.*

Si f tiene un extremo relativo en $x = c$, entonces c es un punto crítico de f.

Definición 1.7. *Una función f es creciente (decreciente) en un intervalo I si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ de I se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). De esta función decimos que es estrictamente monótona en I.*

Observación 1.2. *Sea f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces:*

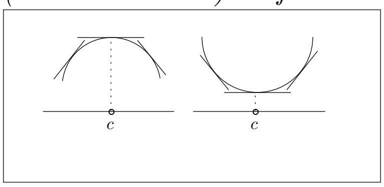
Si $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente (decreciente) en $[a, b]$.

Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en $[a, b]$.

Observación 1.3. *Criterio de la primera derivada.*

Sea f continua en $I = (a, b)$ y sea $c \in I$ un punto crítico de f. Supongamos que f es derivable en un entorno de c salvo, quizá, en el propio c. Entonces:

Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa (de negativa a positiva) en c, $f(c)$ es un máximo relativo (mínimo relativo) de f.



Definición 1.8. *Concavidad y convexidad.*

Sea f derivable en un intervalo abierto $I = (a, b)$. La gráfica de f es cóncava (convexa) en I si f' es creciente (decreciente) en ese intervalo. Un punto $c \in I$ es un punto de inflexión de f si en él se produce un cambio de concavidad a convexidad o viceversa.

Observación 1.4. *Criterio de concavidad y convexidad.*

Sea f una función tal que f'' existe en un intervalo $I = (a, b)$. Si $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) para todo $x \in I$, la gráfica de f es cóncava (convexa) en I.

Observación 1.5. *Si c es un punto de inflexión de f, entonces, o bien $f''(c) = 0$ ó $f''(c)$ no está definida.*

Observación 1.6. *Sea $f'(c) = 0$ de modo que f'' existe y es continua en un intervalo que contiene a c. Entonces:*

1. *Si $f''(c) > 0$, f tiene en c un mínimo relativo.*
2. *Si $f''(c) < 0$, f tiene en c un máximo relativo.*
3. *Si existen y son continuas en un intervalo que contiene a c todas las derivadas hasta $f^{n)}$, con $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{n-1)}(c) = 0$ y $f^{n)}(c) \neq 0$, se tiene:*

    3.1 Si n es par y $f^{n)}(c) > 0$, f tiene un mínimo relativo en c.

    3.2 Si n es par y $f^{n)}(c) < 0$, f tiene un máximo relativo en c.

    3.3 Si n es impar, f tiene un punto de inflexión en c.

Definición 1.9. *Asíntotas.*

Asíntota horizontal: $\{y = a\}$ se obtiene si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$.

Asíntota vertical: $\{x = a\}$ se obtiene si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Asíntota oblicua: $\{y = mx + n\}$ se obtiene si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ y $\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x) - mx\} = n$.

Elementos principales de una gráfica

1. Dominio de f,

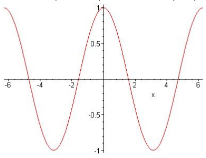
    $$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$$

    y recorrido o conjunto imagen de f,

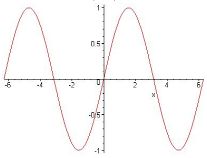
    $$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D(f) \text{ con } f(x) = y\}$$

2. Cortes con los ejes OX y OY.
3. Periodicidad. Menor valor T tal que $f(x + T) = f(x)$ para cualquier $x \in D(f)$.

4. Simetrías. Simetría par si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$



Simetría impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D(f)$.



5. Asíntotas.

6. Puntos críticos. Crecimiento, decrecimiento y extremos.

7. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

1.4. TABLA DE DERIVADAS

Tabla de derivadas elementales.

1. $[u^{n}(x)]' = n\, u^{n-1}(x)\, u'(x)$

2. $\operatorname{sen}'[u(x)] = \cos[u(x)]\, u'(x)$

3. $\cos'[u(x)] = -\operatorname{sen}[u(x)]\, u'(x)$

4. $\operatorname{tg}'[u(x)] = \dfrac{u'(x)}{\cos^{2}[u(x)]} = \{1 + \operatorname{tg}^{2}[u(x)]\}u'(x)$

5. $\sec'[u(x)] = \sec[u(x)]\, \operatorname{tg}\,[u(x)]\, u'(x)$

6. $\operatorname{cosec}'[u(x)] = -\operatorname{cosec}[u(x)]\, \operatorname{cotg}[u(x)]\, u'(x)$

7. $\operatorname{cotg}'[u(x)] = -\dfrac{u'(x)}{\operatorname{sen}^{2}[u(x)]} = -\{1 + \operatorname{cotg}^{2}[u(x)]\}u'(x)$

8. $\log_a'[u(x)] = \dfrac{\log_a[u(x)]}{u(x)}\, u'(x)$ para $a > 0,\ a \neq 1$

9. $\ln'[u(x)] = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

10. $[a^{u(x)}]' = a^{u(x)}\, \ln(a)\, u'(x)$

11. $[e^{u(x)}]' = e^{u(x)}\, u'(x)$

12. $\operatorname{arcsen}'[u(x)] = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^{2}(x)}}$

13. $\arccos'[u(x)] = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^{2}(x)}}$

14. $\operatorname{arctg}'[u(x)] = \dfrac{u'(x)}{1 + u^{2}(x)}$

15. $\operatorname{arcsec}'[u(x)] = \pm\dfrac{u'(x)}{u(x)\sqrt{1 + u^{2}(x)}} \begin{cases} + \text{ si } u(x) > 1 \\ - \text{ si } u(x) < 1 \end{cases}$

16. $\operatorname{arccosec}'[u(x)] = \mp\dfrac{u'(x)}{u(x)\sqrt{1 + u^{2}(x)}} \begin{cases} - \text{ si } u(x) > 1 \\ + \text{ si } u(x) < 1 \end{cases}$

17. $\operatorname{arccotg}'[u(x)] = -\dfrac{u'(x)}{1 + u^{2}(x)}$

18. $\mathrm{sh}'[u(x)] = \mathrm{ch}[u(x)]\, u'(x)$

19. $\mathrm{ch}'[u(x)] = \mathrm{sh}[u(x)]\, u'(x)$

20. $\mathrm{th}'[u(x)] = \mathrm{sech}^2[u(x)]\, u'(x) = [1 - \mathrm{th}^2(x)]\, u'(x)$

21. $\mathrm{sech}'[u(x)] = -\mathrm{sech}[u(x)]\, \mathrm{th}[u(x)]\, u'(x)$

22. $\mathrm{cosech}'[u(x)] = -\mathrm{cosech}[u(x)]\ \mathrm{coth}[u(x)]\, u'(x)$

23. $\mathrm{coth}'[u(x)] = -\mathrm{cosech}^2[u(x)]\, u'(x) = [1 - \mathrm{coth}^2(x)]\, u'(x)$

24. $\mathrm{argsh}'[u(x)] = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 + u^2(x)}}$

25. $\mathrm{argch}'[u(x)] = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) - 1}}$

26. $\mathrm{argth}'[u(x)] = \dfrac{u'(x)}{1 - u^2(x)}, \quad \mid u(x) \mid < 1$

27. $\mathrm{argsech}'[u(x)] = -\dfrac{u'(x)}{u(x)\, \sqrt{u^2(x) - 1}}$

28. $\mathrm{argcosech}'[u(x)] = -\dfrac{u'(x)}{u(x)\, \sqrt{u^2(x) + 1}}$

29. $\mathrm{argcoth}'[u(x)] = \dfrac{u'(x)}{1 - u^2(x)}, \quad \mid u(x) \mid > 1$

Propiedades de las derivadas.

1. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
2. $[C\, f(x)]' = C\, f'(x)$
3. $[f(x)\, g(x)]' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
4. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$
5. Regla de la cadena: $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]\, g'(x)$
6. Derivada de la función inversa: Si $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y) = g(y)$, $f'(x)\, g'(y) = 1$