1. DERIVACIÓN

1. Hallar los extremos de las funciones siguientes en las regiones especificadas:

b) $f(x) = x^2(x-1)^2$ en el intervalo $[-2, 2]$ y en su dominio.

- DOMINIO. $D = \mathbb{R}$.
- CORTES CON LOS EJES. Cortes con el eje OX. Si $x^2(x-1)^2 = 0$, entonces $x = 0$ ó $x = 1$.
  Cortes con el eje OY. Si $x = 0$, entonces $y = 0$.
- SIGNOS. Claramente $f(x) > 0$ para todo x salvo $f(0) = f(1) = 0$.
- PUNTOS CRÍTICOS. $f'(x) = 2x(x-1)(2x-1)$. Tendremos $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$, $x = 1$ ó $x = 1/2$, siendo $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ y $f(1/2) = 1/16$.
  Los puntos críticos son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 1/2$. Veamos de qué tipo es cada uno. $f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$ siendo $f''(0) = 2 > 0$, $f''(1) = 2 > 0$ y $f''(1/2) = -1 < 0$ con lo que f tiene en $x = 0$ y en $x = 1$ dos mínimos relativos y en $x = 1/2$ un máximo relativo. Los dos mínimos relativos también lo son absolutos, tanto en el intervalo $[-2, 2]$ como en $D = \mathbb{R}$, ya que $f(x) > 0$ para todo $x \neq 0, 1$. Como $f(-2) = 36$ y $f(2) = 4$, el máximo absoluto f en $[-2, 2]$ se alcanza en $x = -2$ y toma el valor $f(-2) = 36$. Por otro lado, f no alcanza un máximo global en $D = \mathbb{R}$ ya que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.
- ASÍNTOTAS. Al ser $f(x)$ un polinomio de grado ≥ 2, no habrá asíntotas de ningún tipo.
- PUNTOS DE INFLEXIÓN. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. $f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$, y $f''(x) = 0$ si y sólo si $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$.
  Si $x \in (-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6})$, entonces $f''(x) > 0$. Se tiene una región de concavidad.
  Si $x \in (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6})$, entonces $f''(x) < 0$. Se tiene una región de convexidad.
  Si $x \in (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \infty)$, entonces $f''(x) > 0$. Se tiene una región de concavidad.
  Tendremos dos puntos de inflexión en $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$, ya que f'' se anula en ellos y cambia de signo al atravesarlos (pasa de cóncava a convexa en $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ y de convexa a cóncava en $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$).

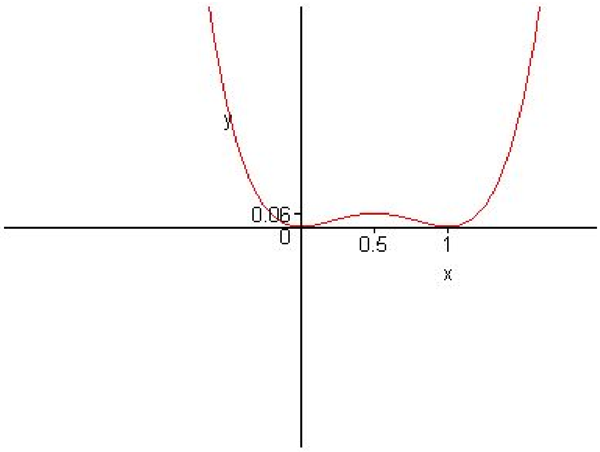


Figura 1

h) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ en el intervalo $[-1,2]$ y en su dominio.

- DOMINIO. $D = \mathbb{R}$.
- CORTES CON LOS EJES. Cortes con el eje OX. Si $\sqrt[3]{(x+1)^2} = 0$, entonces $x = -1$.
  Cortes con el eje OY. Si $x = 0$, entonces $y = 1$.
- SIGNOS. Claramente, $f(x) > 0$ para todo x salvo $f(-1) = 0$.
- PUNTOS CRÍTICOS. $f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$. Tendremos $f'(x) \neq 0$ para todo x. Por otro lado, $f'(x)$ no está definida en $x = -1$, de modo que éste será el único punto crítico y f alcanzará en él un mínimo relativo, que también será absoluto, tanto en $[-1,2]$ como en su dominio $D = \mathbb{R}$, ya que $f(-1) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \neq -1$. Como $f(-1) = 0$ y $f(2) = \sqrt[3]{9}$, el máximo absoluto de f en $[-1,2]$ se alcanza en $x = 2$ y toma el valor $f(2) = \sqrt[3]{9}$. Por otro lado, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, de modo que no habrá máximo absoluto para f en su dominio.
  Veamos el comportamiento de f' en las proximidades de $x = -1$ (sabemos que en $x = -1$ no existe).

  $\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} = -\infty$ mientras que

  $\lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} = +\infty$
- ASÍNTOTAS. No las habrá verticales, ya que $D = \mathbb{R}$. Tampoco las habrá horizontales ya que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Estudiemos las asíntotas oblicuas $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^{2/3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{3}(x+1)^{-1/3} = 0$$

  La segunda igualdad proviene de aplicar la regla de L'Hôpital. Tenemos que tampoco habrá asíntotas oblicuas (con $m = 0$, la única posibilidad sería la horizontal, lo cual es imposible).
- PUNTOS DE INFLEXIÓN. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. $f''(x) = -\frac{2}{9}(x+1)^{-4/3} = \frac{-2}{9(x+1)\sqrt[3]{x+1}}$, de modo que $f''(x) \neq 0$ para todo x y no está definida en $x = -1$. Como $f''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, resulta que la gráfica es convexa a ambos lados de $x = -1$, que no será un punto de inflexión.

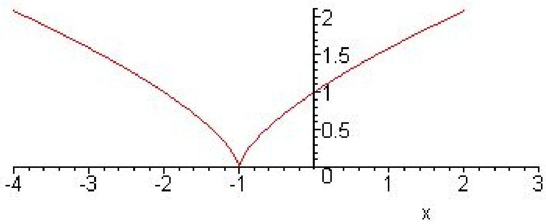


Figura 2

j) $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

- DOMINIO. $D = \mathbb{R}$.
- CORTES CON LOS EJES. Recordemos la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$. Tendremos que $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$, cuya gráfica es sencilla de dibujar.

  Cortes con el eje OX.

  $$f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \text{ para cualquier } k \in \mathbb{Z}$$

  Cortes con el eje OY. Si $x = 0$, entonces $y = 0$.
- SIMETRÍAS. $f(-x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(-2x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) = -f(x)$. Se tiene simetría impar.
- PERIODICIDAD. $f(x + \pi) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2(x + \pi)) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x)) = f(x)$, de modo que f es periódica de período $T = \pi$.
- SIGNOS. Si $x \in (0, \pi/2)$, $f(x) > 0$ y si $x \in (\pi/2, \pi)$, $f(x) < 0$. Al ser f periódica de período π, podemos garantizar que $f(x) > 0$ si $x \in (k\pi, k\pi + \pi/2)$ y $f(x) < 0$ si $x \in (k\pi + \pi/2, (k + 1)\pi)$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.
- PUNTOS CRÍTICOS. $f'(x) = \cos 2x$. Entonces $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi/4 + k\pi/2$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. En el intervalo $[0, 2\pi]$ se tienen los puntos críticos $\{\pi/4, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\}$ con $f(\pi/4) = 1/2$, $f(\frac{3}{4}\pi) = -1/2$, $f(\frac{5}{4}\pi) = 1/2$ y $f(\frac{7}{4}\pi) = -1/2$.

  Además, $f''(x) = -2 \operatorname{sen} 2x$ con $f''(\pi/4) < 0$, $f''(\frac{5}{4}\pi) < 0$ (máximos relativos en $x = \pi/4$ y $x = \frac{5}{4}\pi$) y $f''(\frac{3}{4}\pi) > 0$, $f''(\frac{7}{4}\pi) > 0$ (mínimos relativos en $x = \frac{3}{4}\pi$ y $x = \frac{7}{4}\pi$). Como $|f(x)| \leq 1/2$ para todo x, los extremos relativos lo son también absolutos.
- PUNTOS DE INFLEXIÓN. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. Como $f''(x) = -2 \operatorname{sen} 2x$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Además:

  Si $x \in (k\pi, k\pi + \pi/2)$, entonces $f''(x) < 0$ (regiones de convexidad).

  Si $x \in (k\pi + \pi/2, (k + 1)\pi)$, entonces $f''(x) > 0$ (regiones de concavidad).

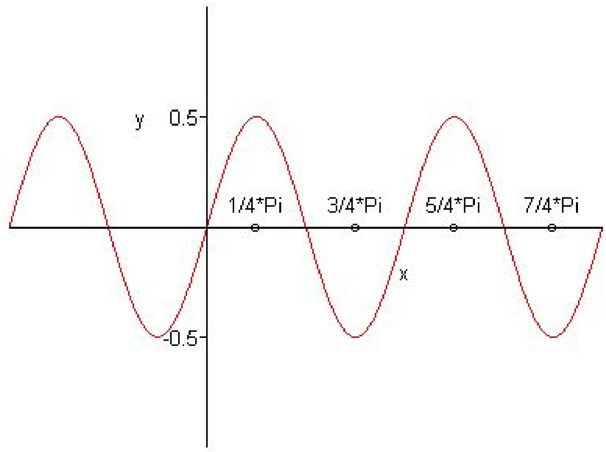


Figura 3

l) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y en su dominio.

En este caso haremos un estudio menos detallado. Prestaremos especial atención al estudio de la simetría, la periodicidad y los puntos críticos.

- DOMINIO. $D = \mathbb{R}$.
- SIMETRÍAS. $f(-x) = \operatorname{sen}^2(-x) + \cos(-x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x = f(x)$. Se tiene simetría par.
- PERIODICIDAD. $f(x+2\pi) = \operatorname{sen}^2(x+2\pi)+\cos(x+2\pi) = f(x)$. Período $T = 2\pi$.
- PUNTOS CRÍTICOS. $f'(x) = \operatorname{sen} x(2\cos x - 1)$. Entonces

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = 0 \\ \text{ ó} \\ \cos x = 1/2 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ ó} \\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ó } x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Se tienen los puntos críticos $\{k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5}{3}\pi+2k\pi\}$ con $f(\pi/3 + 2k\pi) = f(\frac{5}{3}\pi + 2k\pi) = 5/4$ y $f(k\pi) = (-1)^k$. En el intervalo $[-\pi, \pi]$ se tienen los puntos críticos $\{-\pi, -\pi/3, 0, \pi/3, \pi\}$.

$f''(x) = \cos x(2\cos x - 1) - 2\operatorname{sen}^2 x$ y $f''(k\pi) > 0$ (mínimo relativo), $f''(\pi/3 + 2k\pi) < 0$ (máximo relativo) y $f''(\frac{5}{3}\pi + 2k\pi) < 0$ (máximo relativo).

Como $f(-\pi) = f(\pi) = -1$, se tiene que el máximo absoluto en $[-\pi, \pi]$ es $5/4$ (el mismo que en el dominio) y se alcanza en $x = \pm\pi/3$, mientras que el mínimo absoluto es -1 (el mismo que en el dominio) y se alcanza en $x = \pm\pi$.

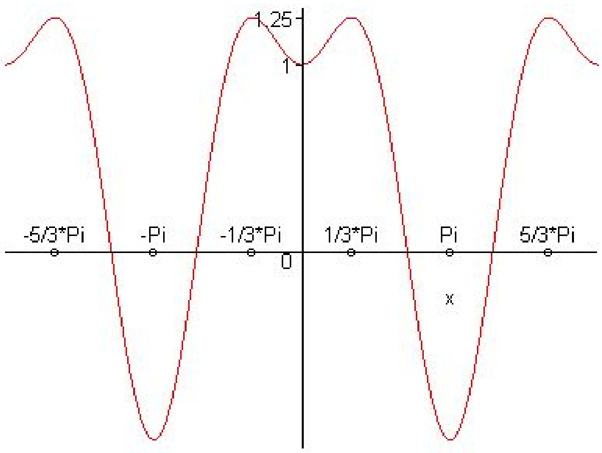


Figura 4

2. Dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

- DOMINIO. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- CORTES CON LOS EJES. Cortes con el eje OX. Si $y = 0$, entonces $x = 0$. Cortes con el eje OY. Si $x = 0$, entonces $y = 0$.
- SIGNOS. Si $x \in (-\infty, 0)$, $f(x) < 0$. Si $x \in (0, 2)$, $f(x) < 0$. Si $x \in (2, \infty)$, $f(x) > 0$.
- PUNTOS CRÍTICOS. $f'(x) = \frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$. Entonces $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = 4$, siendo $f(0) = 0$ y $f(4) = 8$. Además, tenemos que f' no está definida en $x = 2$, pero en ese punto tampoco está definida f, de modo que los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 4$. Veamos de qué tipo son. $f''(x) = \frac{8x-16}{(x-2)^4}$ con $f''(0) = -1 < 0$ (máximo relativo en $x = 0$) y $f''(4) = 1 > 0$ (mínimo relativo en $x = 4$).
- ASÍNTOTAS. Habrá una asíntota vertical en $x = 2$ y una oblicua $y = mx + n$ (el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador). No hay asíntotas horizontales (debería ser el grado del numerador igual o menor que el del denominador).

  El comportamiento de la gráfica cuando x se aproxima a $\pm\infty$ es el siguiente: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

  El comportamiento de la gráfica en las proximidades de la asíntota vertical es el siguiente: $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$, mientras que $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x-2} = +\infty$. Calculemos la asíntota oblicua:

  $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-2} = 1$ y $n = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x-2} = 2$. De manera que $y = x + 2$ es la asíntota oblicua.
- PUNTOS DE INFLEXIÓN. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. Como $f''(x) = \frac{8x-16}{(x-2)^4}$, tenemos que f'' no se anula en ningún punto de su dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Veamos el signo:

  Si $x \in (-\infty, 2)$, $f''(x) < 0$ (región de convexidad).

  Si $x \in (2, \infty)$, $f''(x) > 0$ (región de concavidad). Resulta claro que no hay puntos de inflexión.

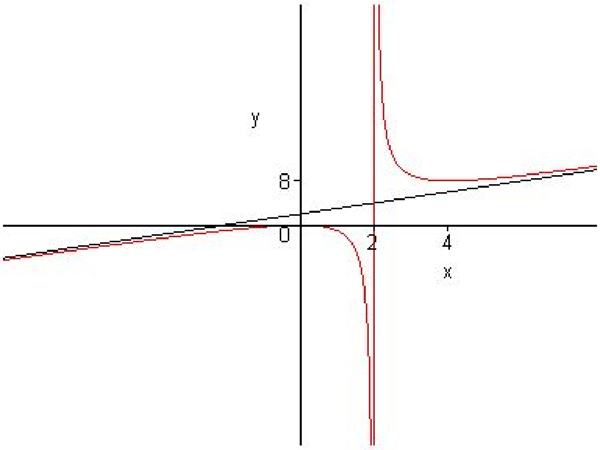


Figura 5

d) $f(x) = \frac{x^4}{1-x^2}$

- DOMINIO. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
- CORTES CON LOS EJES. Cortes con el eje OX. Si $y = 0$ entonces $x = 0$. Cortes con el eje OY. Si $x = 0$, entonces $y = 0$.
- SIGNOS. Si $x \in (-\infty, -1)$, $f(x) < 0$. Si $x \in (-1, 0)$, $f(x) > 0$. Si $x \in (0, 1)$, $f(x) > 0$. Si $x \in (1, \infty)$, $f(x) < 0$.
- SIMETRÍA. $f(-x) = \frac{(-x)^4}{1-(-x)^2} = f(x)$. Simetría par.
- PUNTOS CRÍTICOS. $f'(x) = \frac{2x^3(2-x^2)}{(1-x^2)^2}$. Entonces, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = \pm\sqrt{2}$, siendo $f(0) = 0$ y $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -4$. Además, f' no está definida en $x = \pm 1$, pero en esos puntos tampoco está definida f, de modo que los puntos críticos son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{2}$. Veamos de qué tipo son. Podría hacerse calculando la derivada segunda, pero es un poco engorroso, de modo que veremos si f' cambia de signo al pasar por los puntos críticos. Si $x \in (-\infty, -\sqrt{2})$, $f'(x) > 0$ y si $x \in (-\sqrt{2}, -1)$, $f'(x) < 0$, de modo que en $x = -\sqrt{2}$ hay un máximo relativo. Por simetría, tendremos otro máximo relativo en $x = \sqrt{2}$. Si $x \in (-1, 0)$, $f'(x) < 0$ y si $x \in (0, 1)$, $f'(x) > 0$, de modo que en $x = 0$ hay un mínimo relativo.
- ASÍNTOTAS. Habrá dos asíntotas verticales en $x = \pm 1$ y no habrá asíntotas horizontales ni oblicuas. El comportamiento de la gráfica cuando x se aproxima a $\pm\infty$ es el siguiente: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$. El comportamiento de la gráfica en las proximidades de las asíntotas verticales es el siguiente: $\lim_{x\to -1^-} \frac{x^4}{1-x^2} = -\infty$, mientras que $\lim_{x\to -1^+} \frac{x^4}{1-x^2} = +\infty$. Por simetría, $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^4}{1-x^2} = +\infty$, mientras que $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^4}{1-x^2} = -\infty$.
- PUNTOS DE INFLEXIÓN. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. $f''(x) = \frac{2x^2(x^4-3x^2+6)}{(1-x^2)^3}$ y $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Además, f'' está definida en $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Estudiemos el signo de f''. Dando valores, se tiene que:

  Si $x \in (-\infty, -1)$, $f''(x) < 0$ (región de convexidad).
  Si $x \in (-1, 0)$, $f''(x) > 0$ (región de concavidad).
  Si $x \in (0, 1)$, $f''(x) > 0$ (región de concavidad).
  Si $x \in (1, \infty)$, $f''(x) < 0$ (región de convexidad). No habrá puntos de inflexión.

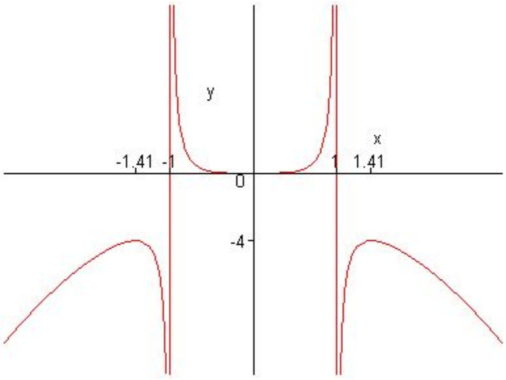


Figura 6

h) $f(x) = x\sqrt{x-1}$

- DOMINIO. $D = [1, \infty)$.
- CORTES CON LOS EJES. Cortes con el eje OX. Si $y = 0$, entonces debe ser $x = 1$. Cortes con el eje OY. No hay.
- SIGNOS. Claramente $f(x) > 0$ para todo $x \neq 1$ y $f(1) = 0$.
- PUNTOS CRÍTICOS. $f'(x) = (x-1)^{1/2} + \frac{1}{2}x(x-1)^{-1/2} = \frac{3x-2}{2(x-1)^{1/2}}$. Entonces, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2/3 < 1$, que está fuera del dominio. El único punto crítico es $x = 1$, donde no está definida f' y la función alcanza el mínimo absoluto $f(1) = 0$. Observemos que la pendiente de la gráfica al aproximarnos a $x = 1$ es $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \infty$.
- ASÍNTOTAS. No hay asíntotas verticales. El comportamiento de la gráfica cuando x se aproxima a $+\infty$ es el siguiente:

  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De modo que no hay asíntota horizontal. Estudiemos la existencia de asíntotas oblicuas:

  $$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (x-1)^{1/2} = \infty$$

  Tampoco habrá asíntotas oblicuas.
- PUNTOS DE INFLEXIÓN. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. $f''(x) = \frac{1}{(x-1)^{1/2}}\left(\frac{3x-4}{4(x-1)}\right)$ y $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4/3$. Además f'' está definida en $D = (1, \infty)$. Estudiemos el signo de f''. Dando valores, se tiene que:

  Si $x \in (1, 4/3)$, $f''(x) < 0$ (región de convexidad).

  Si $x \in (4/3, \infty)$, $f''(x) > 0$ (región de concavidad). Tendremos que $x = 4/3$ es un punto de inflexión.

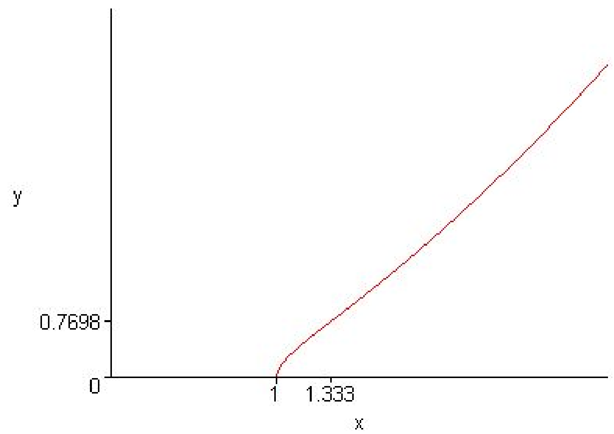


Figura 7

k) $f(x) = xe^{1/x}$

- DOMINIO. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- CORTES CON LOS EJES. Cortes con el eje OX. No hay.
  Cortes con el eje OY. No hay.
- SIGNOS. $f(x) < 0$ para todo $x < 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.
- PUNTOS CRÍTICOS. $f'(x) = e^{1/x}\left(\frac{x-1}{x}\right)$, de modo que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, siendo $f(1) = e$. El único punto crítico es $x = 1$. Por otro lado, $f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3}$, con lo que $f''(1) = e > 0$ y en $x = 1$ se alcanza un mínimo relativo.
- ASÍNTOTAS. Veamos el comportamiento de f cuando x tiende a $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} xe^{1/x} = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^{1/x} = -\infty$$

  No habrá asíntotas horizontales. Veamos el comportamiento de f en las proximidades de $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{1/x} = 0$$

  y

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-1/x^2)e^{1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty$$

  La segunda igualdad resulta de aplicar la regla de L'Hôpital.

  De manera que existe una asíntota vertical en $x = 0$ (la gráfica tiende a ∞ al aproximarse a $x = 0$ por la derecha). Estudiemos la existencia de asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} xe^{1/x} - x = \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{1/x} - 1) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1$$

  La penúltima igualdad proviene de aplicar la regla de L'Hôpital. La asíntota oblicua es $y = x + 1$.
- PUNTOS DE INFLEXIÓN. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. Calculemos el signo de $f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3}$. $f''(x) \neq 0$ para todo x de su dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  Si $x \in (-\infty, 0)$, $f''(x) < 0$ (región de convexidad).
  Si $x \in (0, \infty)$, $f''(x) > 0$ (región de concavidad).

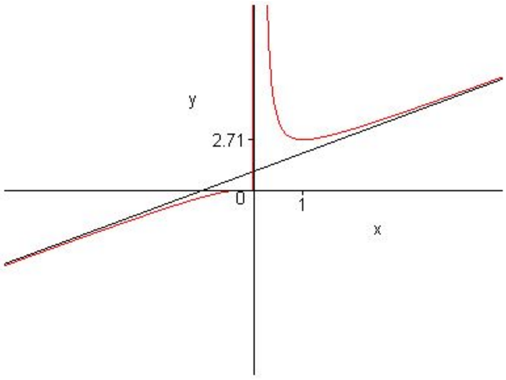


Figura 8

m) $f(x) = x \ln x$

- DOMINIO. $D = (0, \infty)$.
- CORTES CON LOS EJES. Cortes con el eje OX. Si $x \ln x = 0$, entonces $x = 1$.
  Cortes con el eje OY. No hay.
- SIGNOS. Si $x \in (0, 1)$, $f(x) < 0$. Si $x \in (1, \infty)$, $f(x) > 0$.
- PUNTOS CRÍTICOS. $f'(x) = \ln x + 1$, de modo que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$, que será el único punto crítico. Como $f''(x) = \frac{1}{x}$, tenemos $f''(e^{-1}) = e > 0$, de modo que se alcanza un mínimo relativo en $x = e^{-1}$, con $f(e^{-1}) = -e^{-1}$.
- ASÍNTOTAS. Tenemos que $\lim_{x \to \infty} x \ln x = \infty$, de modo que no hay asíntota horizontal. Veamos el comportamiento de f en las proximidades de $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

  La penúltima igualdad se obtiene a partir de la regla de L'Hôpital. No habrá asíntota vertical en $x = 0$. Tampoco habrá asíntotas oblicuas ya que $m = \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$.
- PUNTOS DE INFLEXIÓN. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. Como $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ para todo $x \in D = (0, \infty)$, la gráfica será cóncava. No habrá puntos de inflexión.

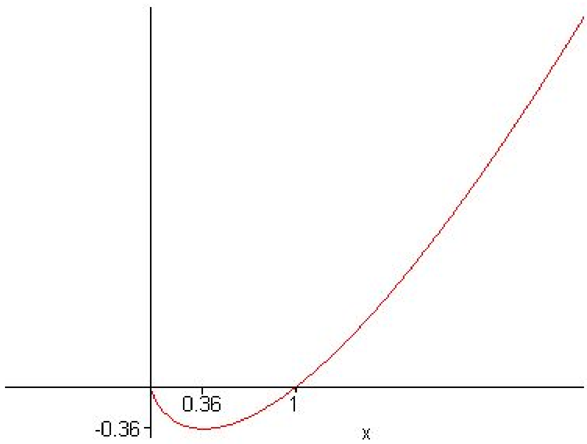


Figura 9

n) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

- DOMINIO.

$$D = \{x : (x+1) > 0 \text{ y } (x-1) > 0\} \cup \{x : (x+1) < 0 \text{ y } (x-1) < 0\} =$$

$$= \{x : x > -1 \text{ y } x > 1\} \cup \{x : x < -1 \text{ y } x < 1\} =$$

$$= \{x : x > 1\} \cup \{x : x < -1\}$$

De manera que $D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

- CORTES CON LOS EJES. Cortes con el eje OX.

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x+1 = x-1 \Leftrightarrow 1 = -1$$

de modo que no hay cortes con el eje OX. Tampoco habrá cortes con el eje OY.

- SIGNOS. Si $x \in (-\infty, -1)$, $f(x) < 0$. Si $x \in (1, \infty)$, $f(x) > 0$.

- PUNTOS CRÍTICOS. $f'(x) = \frac{-2}{x^2-1}$, de modo que $f'(x) \neq 0$ para todo x en el dominio de f'. La función f' no está definida en $x = \pm 1$, donde tampoco lo está f, de manera que no hay ningún punto crítico.

- ASÍNTOTAS. Como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, hay una asíntota horizontal $y = 0$ (esto implica que no va a haberlas oblicuas). Veamos el comportamiento de f en las proximidades de $x = \pm 1$ para detectar posibles asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$$

de manera que hay dos asíntotas verticales, en $x = -1$ y en $x = 1$.

- PUNTOS DE INFLEXIÓN. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. $f''(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2}$.

  Si $x \in (-\infty, -1)$, $f''(x) < 0$ (región de convexidad).

  Si $x \in (1, \infty)$, $f''(x) > 0$ (región de concavidad). No habrá puntos de inflexión.

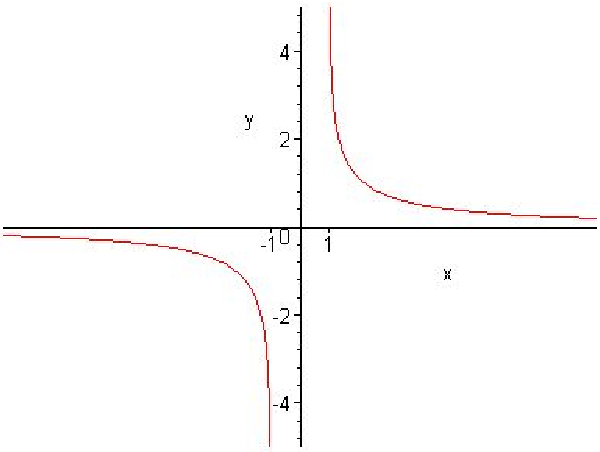


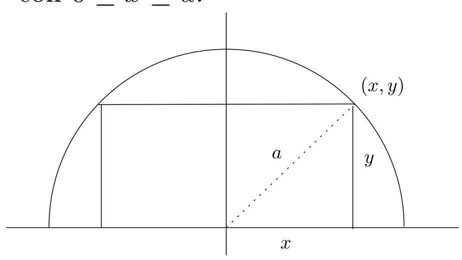
Figura 10

3. Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y cuyo producto sea el máximo posible.

   Sean $x > 0, y > 0$ dichos números. Entonces $x + y = 20$. Llamemos $P = xy = x(20 - x) = 20x - x^2$ al producto. Tenemos la función $P(x) = -x^2 + 20x$ y deseamos obtener el valor de $x > 0$ donde la función P alcanza su máximo valor. Como $P'(x) = -2x+20$, $P'(x) = 0$ si y sólo si $x = 10$. En ese punto se tiene un punto crítico (será un máximo local, ya que $P''(x) = -2 < 0$ para todo x, incluido $x = 10$). Por tanto, deben ser $x = 10$ e $y = 10$, alcanzándose el valor máximo del producto $P = 100$.

4. Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que pueda inscribirse en una semicircunferencia de radio a.

   Consideramos la semicircunferencia superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Se debe maximizar la función $A = 2xy = 2x\sqrt{a^2 - x^2} = 2x(a^2 - x^2)^{1/2}$ con $0 \leq x \leq a$.



   Calculemos $A'(x)$ e igualemos el resultado a 0.

$$2x\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-1/2}(-2x)+2(a^2-x^2)^{1/2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = a^2 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

   Para $x = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ tenemos un punto crítico. Como un valor máximo del área se alcanza con seguridad y el mínimo $A = 0$ se alcanza en $x = a$ y $x = 0$, resulta que A alcanza en $x = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ su valor máximo.

5. Un alambre de longitud L debe cortarse en 2 trozos, formándose con uno de ellos un cuadrado y con el otro una circunferencia. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas encerradas por los dos trozos sea máxima? ¿Y para que sea mínima?

   Si x es el lado del cuadrado y r el radio de la circunferencia, la suma de las áreas buscada es $A = x^2 + \pi r^2$. La relación entre x y r es

$4x + 2\pi r = L$. Despejando r en función de x, queda $r = \frac{1}{2\pi}(L - 4x)$. Entonces

$$A = x^2 + \frac{1}{4\pi}(L - 4x)^2$$

Si $x = 0$, el alambre se usa para la circunferencia y $A = \frac{L^2}{4\pi}$. Si $x = L/4$, el alambre se usa para el cuadrado y $A = \frac{L^2}{16}$. Se tiene que $A(x)$ está definida entre $x = 0$ y $x = L/4$. Es claro que para $x = 0$ se alcanza un área mayor que para $x = L/4$. Calculemos A' e igualemos a 0 para obtener puntos críticos.

$$A'(x) = 2x - \frac{2}{\pi}(L - 4x) = 0 \Rightarrow \pi x = L - 4x \Rightarrow x = \frac{L}{4 + \pi}$$

Como $A''(x) = 2 + \frac{8}{\pi} > 0$, A alcanza en $x = \frac{L}{4+\pi}$ un mínimo local. Para alcanzar un área máxima debemos hacer $x = 0$ (todo el alambre se utiliza para construir la circunferencia), obteniendo $A = L^2/4\pi$. Para alcanzar un área mínima, debemos cortar en $x = \frac{L}{4+\pi}$, esto es, debemos emplear una longitud de $4x = 4\frac{L}{4+\pi}$ para construir el cuadrado y el resto para la circunferencia.

6. Al precio de 1,50 € un comerciante puede vender 500 botes de refresco que le cuestan 70 céntimos cada uno. Por cada céntimo que rebaja el precio, el número de refrescos vendidos aumenta en 25.¿Qué precio de venta maximiza el beneficio?

   Sea x el número de céntimos que se rebaja el precio de cada refresco. El beneficio de cada unidad es $80 - x$ céntimos y el número total de unidades vendidas es de $500 + 25x$. El beneficio total es

   $$B(x) = (80 - x)(500 + 25x) = 40000 + 1500x - 25x^2$$

   Maximizamos esta función derivando e igualando a 0.

   $$B'(x) = 1500 - 50x = 0 \Rightarrow x = 30$$

   Como $B''(x) = -50 < 0$, efectivamente, en $x = 30$ tenemos un máximo local de B. De modo que el precio más ventajoso es de $1,20$ €.

7. Determínese si las funciones f y g son derivables en $x = 0$, siendo

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudiemos en primer lugar $f(x)$. Veamos si existe $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\operatorname{sen}\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}\frac{1}{h}$$

Pero dicho límite no existe. De modo que f no es derivable en 0.

Estudiemos $g(x)$. Se tiene

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\operatorname{sen}\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h\operatorname{sen}\frac{1}{h}=0$$

De manera que g es derivable en 0 y $g'(0)=0$.

8. Calcular, utilizando la noción de límite, las derivadas de las siguientes funciones

   1. $f(x)=1-3x^2$ 2. $f(x)=5x^2-3x+2$
   3. $f(x)=\sqrt{1+2x}$ 4. $f(x)=\frac{3+x}{1-3x}$

   Calculemos el caso 1.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-3(x+h)^2-(1-3x^2)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3h^2-6xh}{h}=\lim_{h\to 0}(-3h-6x)=-6x$$

Calculemos el caso 2.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)^2-3(x+h)+2-5x^2+3x-2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5h^2+10xh-3h}{h}=\lim_{h\to 0}(5h+10x-3)=10x-3$$

Calculemos el caso 3.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+2(x+h)}-\sqrt{1+2x}}{h}\left[\frac{\sqrt{1+2(x+h)}+\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2(x+h)}+\sqrt{1+2x}}\right]=$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h[\sqrt{1+2(x+h)}+\sqrt{1+2x}]} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+2x+2h}+\sqrt{1+2x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

Calculemos el caso 4.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3+(x+h)}{1-3(x+h)} - \frac{3+x}{1-3x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(3+x+h)(1-3x)-(3+x)(1-3x-3h)}{h(1-3x-3h)(1-3x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{10h}{h(1-3x-3h)(1-3x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{10}{(1-3x-3h)(1-3x)} = \frac{10}{(1-3x)^2}$$

9. Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = ((e^x - \operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x)^2$
2. $f(x) = e^x \operatorname{sen}^3 x$
3. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)$
4. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$
5. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$
6. $f(x) = e^x(\operatorname{tg} x - x)$
7. $f(x) = \cos(x^3)$
8. $f(x) = \cos^3 x$
9. $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
10. $f(x) = \left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^9$
11. $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$
12. $f(x) = \cos(\operatorname{tg} x)$
13. $f(x) = 2x \operatorname{arc\,tg}(2x) - \ln(\sqrt{1+4x^2})$
14. $f(x) = \ln\left(\frac{2\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg} x+2}\right)$

1. $f'(x) = 2(e^x\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)(e^x \cos^x - 2e^x \cos x \operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} x \cos x)$
2. $f'(x) = e^x \operatorname{sen}^2 x(\operatorname{sen} x + 3\cos x)$ 3. $f'(x) = 1/2$
4. $f'(x) = \frac{\sec^2 x}{x} - \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}$ 5. $f'(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
6. $f'(x) = e^x(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - x)$ 7. $f'(x) = -3x^2 \operatorname{sen}(x^3)$
8. $f'(x) = -3\operatorname{sen} x \cos^2 x$
9. $f'(x) = \frac{1}{2}\left[x + (x+x^{1/2})^{1/2}\right]^{-1/2}\left[1+\frac{1}{2}(x+x^{1/2})^{-1/2}(1+\frac{1}{2}x^{-1/2})\right]$
10. $f'(x) = 45\frac{(x-2)^8}{(2x+1)^{10}}$ 11. $f'(x) = \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)))\cos(\operatorname{sen}(x))\cos x$
12. $f'(x) = -\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)\sec^2 x$ 13. $f'(x) = 2\operatorname{arc\,tg}(2x)$
14. $f'(x) = \frac{3}{2+5\operatorname{sen} x\cos x}$

10. Encuéntrese la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto especificado

a) $y = \text{tg } x, \quad (\pi/4, 1)$ b) $y = 2 \,\text{sen } x, \quad (\pi/6, 1)$

Caso a). Se tiene $y'(x) = \sec^2 x$. Como $y(\pi/4) = 1$, efectivamente el punto dado pertenece a la curva. La ecuación de la recta tangente es $y - y_0 = m(x - x_0)$ siendo $(x_0, y_0) = (\pi/4, 1)$ y $m = y'(x_0) = y'(\pi/4) = \sec^2(\pi/4) = 2$. Obtenemos

$$y - 1 = 2(x - \pi/4).$$

Caso b). Se tiene $y'(x) = 2\cos x$. La ecuación de la recta tangente a la curva en $(\pi/6, 1)$ es

$$y - 1 = \sqrt{3}(x - \pi/6)$$

11. Determinar $y'(x)$ mediante derivación implícita sabiendo que $x^3 + y^3 = 6xy$ y calcular la recta tangente a la curva determinada por la ecuación (folio de Descartes) en el punto $(3, 3)$. Determinar $y'(x)$ sabiendo que $\text{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

Aplicamos derivación implícita a la primera ecuación para obtener $3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy'$. De modo que

$$y' = \frac{3x^2 - 6y}{6x - 3y^2} = \frac{x^2 - 2y}{2x - y^2}$$

Cuando $x = y = 3$, resulta $y' = \frac{3^2 - 6}{6 - 3^2} = -1$. En consecuencia, la ecuación de la recta es $y - 3 = -1(x - 3)$ o $x + y = 6$.

Para la segunda ecuación se tiene $\cos(x + y)(1 + y') = 2yy'\cos x - y^2 \,\text{sen}\, x$. Despejando y' se obtiene

$$y' = \frac{y^2 \,\text{sen}\, x + \cos(x + y)}{2y\cos x - \cos(x + y)}$$

12. Calcúlese, aplicando la derivación implícita, $y'(x)$ siendo $y = \text{arc sen } x$.

Se tiene $\text{sen}\, y = x$. Aplicando derivación implícita a esta igualdad, resulta $y' \cos y = 1$, esto es, $y' = \frac{1}{\cos y}$. De manera que $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

13. Derívense, aplicando derivación logarítmica, las siguientes funciones:

a) $y = x^{\sqrt{x}}$ b) $y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ c) $y = (\text{sen } x)^x$

d) $y = (\ln x)^x$ e) $y = (1 + x)^{\ln(1+x)}$

Caso a). Aplicando logaritmos, $\ln y = \sqrt{x} \ln x$. Al derivar, resulta

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$y' = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} \right)$$

Caso b). Tras aplicar logaritmos, se tiene

$$\ln y = \frac{3}{4} \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Al derivar con respecto a x,

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}$$

de modo que

$$y' = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2} \right)$$

Caso c). Se procede como en los casos anteriores.

$$\ln y = x \ln(\operatorname{sen} x)$$

$$y' = (\operatorname{sen} x)^x \left(\ln(\operatorname{sen} x) + \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x} \right)$$

Caso d). Se tiene $\ln y = x \ln(\ln x)$, de modo que

$$\frac{y'}{y} = \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}$$

En consecuencia,

$$y' = (\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right)$$

Caso e). Aplicando logaritmos, $\ln y = \ln(1+x)^2$. Al derivar, se tiene $\frac{y'}{y} = 2\ln(1+x)\frac{1}{1+x}$, de modo que

$$y' = 2(1+x)^{\ln(1+x)} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

14. Dada $f(x) = \ln x$, utilícese que $f'(1) = 1$ para probar que

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Dado que

$$1 = f'(1) = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right),$$

se concluye que $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

15. Dada la función $f(x) = \sqrt{x+3}$, utilícese la diferencial dy para obtener una aproximación al valor de $\sqrt{4,05}$. Hágase lo mismo con $f(x) = \ln x$ para obtener una aproximación a $\ln(0,9)$.

Sabemos que $f(a+dx) \approx f(a) + dy$. Dado que $dy = f'(x)dx$ y que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$, considerando $a = 1$ y $dx = 0,05$, obtenemos

$$\sqrt{4,05} = f(1,05) \approx f(1) + f'(1)(0,05) = 2 + \frac{1}{4}(0,05) = 2,0125$$

Para el segundo caso sabemos que $f'(x) = \frac{1}{x}$. Elegimos $a = 1$ y $dx = -0,1$.

$$\ln(0,9) = f(0,9) \approx f(1) + f'(1)(-0,1) = 0 + 1(-0.1) = -0.1$$

16. Pruébese, aplicando el teorema del valor medio, que la ecuación $e^x - x - 1 = 0$ tiene una única solución real.

Considérese la función derivable $f(x) = e^x - x - 1$. Como $f(0) = 0$, si existiese un segundo valor real a, pongamos $a > 0$, tal que $f(a) = 0$, por el teorema del valor medio debería existir un $x_0 \in (0, a)$ tal que $f'(x_0) = 0$. Sin embargo, $f'(x) = e^x - 1 > 0$ para todo $x > 0$, lo cual nos lleva a contradicción. Si suponemos $a < 0$, llegamos a una contradicción análoga, ya que $f'(x) < 0$ para todo $x < 0$.

En consecuencia, no existe tal valor real a de modo que $f(a) = 0$.

17. Calcúlense los siguientes límites haciendo uso de la regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n}, \quad n\in\mathbb{N}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$ f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \operatorname{tg} x)$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$ k) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$ l) $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\ln x)$

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1/x}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \cdots = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{n!} = \infty$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x^{1/3}} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2\sec^4 x}{6} = 2/6 = 1/3$

f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0$

g) Sea $y = (1+\operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x}$. Aplicando logaritmos, se tiene

$$\ln y = \frac{\ln(1+\operatorname{sen} 4x)}{\operatorname{tg} x}$$

Aplicando límites, resulta

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{4\cos 4x}{1+\operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Por tanto, como $y = e^{\ln y}$,

$$\lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln y} = e^4$$

h) Sea $y = x^x$. Al aplicar logaritmos y calcular límites se obtiene

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

En consecuencia,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln y} = e^0 = 1$$

i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x\to\infty} 3x^{-1/3} = 0$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{\frac{-1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0^+} (-3x^{1/2}) = 0$

k) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x\to\infty} \left((\sqrt{x^2+x} - x)\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} \right) =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1} = 1/2$

l) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x - \ln x) = \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$. Debido a que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0,$$

resulta $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x - \ln x) = \infty$.

18. Calcúlense los polinomios de Taylor siguientes:

a) Polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $a = 0$. Dar un valor aproximado de $\sqrt{1,02}$ utilizando un polinomio de orden 2 y obtener una estimación del error cometido.

b) Polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ en $a = 0$. Dar un valor aproximado de $\ln 3$ utilizando un polinomio de orden 3.

c) Fórmula general del polinomio de Taylor de orden n de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = \pi/6$.

d) Fórmula general del polinomio de Taylor de orden n de $f(x) = e^x$, en $a = 0$. Dar un valor aproximado del número e utilizando el polinomio de orden 7 obtenido.

Apartado a). $f(x) = (x+1)^{1/2}$, $f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}$, $f'''(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{-5/2}$, $f^{4)}(x) = -\frac{15}{16}(x+1)^{-7/2}$.
$f(0) = 1, f'(0) = 1/2$, $f''(0) = -1/4$, $f'''(0) = 3/8, f^{4)}(0) = -15/16$.

El polinomio de Taylor pedido será

$$P_{4,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4\cdot 2}x^2 + \frac{3}{8\cdot 3!}x^3 - \frac{15}{16\cdot 4!}x^4 =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16\cdot 3!}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$

La aproximación pedida es

$$\sqrt{1,02} = \sqrt{1+0,02} \approx P_{2,0}(0,02) = 1 + \frac{1}{2}(0,02) - \frac{1}{8}(0,02)^2 = 1,0099$$

Una cota para el error cometido es

$$|R_{2,0}(0,02)| = |f(0,02) - P_{2,0}(0,02)| = \left|\frac{f^{3)}(t)}{3!}(0,02-0)^3\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{16}(t+1)^{-5/2}(0,02)^3\right| =$$

$$= \frac{1}{16(t+1)^{5/2}}(0,02)^3 \quad \text{para cierto } t \in (0,0'02)$$

De manera que $|R_{2,0}(0,02)| < \frac{1}{16}(0,02)^3 = 5 \cdot 10^{-7}$

Apartado b). $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$, $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$, $f''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right)$, $f'''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{2}{(1-x)^3}\right)$, $f^{4)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-6}{(x+1)^4} + \frac{6}{(1-x)^4}\right)$.
$f(0) = 0, f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = 2, f^{4)}(0) = 0.$
El polinomio de Taylor pedido será

$$P_{4,0}(x) = x + \frac{1}{3}x^3$$

Téngase en cuenta que $P_{3,0}(x) = P_{4,0}(x)$. El valor aproximado de $\ln 3$ pedido es

$$\ln 3 = \ln\left(\sqrt{\frac{1+0,8}{1-0,8}}\right) = f(0,8) \approx P_{3,0}(0,8) = (0,8) + \frac{1}{3}(0,8)^3 \approx 0,9706$$

Apartado c). Obsérvese que $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x) = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$, $f'''(x) = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$, $f^{4)}(x) = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$. Se tiene

$$f^{k)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

De modo que

$$f^{k)}(\pi/6) = \operatorname{sen}\left(\pi/6 + k\frac{\pi}{2}\right)$$

El polinomio de Taylor pedido será

$$P_{n,\pi/6}(x) = \operatorname{sen}(\pi/6) + \operatorname{sen}(\pi/6+\pi/2)(x-\pi/6) + \operatorname{sen}(\pi/6+\pi)\frac{(x-\pi/6)^2}{2!} + \cdots$$

$$\cdots + \operatorname{sen}\left(\pi/6 + n\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-\pi/6)^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x-\pi/6) - \frac{1}{2}\frac{(x-\pi/6)^2}{2!} + \cdots + sen\left(\pi/6 + n\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-\pi/6)^n}{n!}$$

Apartado d). $f(x) = f'(x) = \cdots = f^{n)}(x) = e^x$. Además, $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{n)}(0) = 1$.

El polinomio de Taylor pedido será

$$P_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

El polinomio de Taylor de orden 7 es

$$P_{7,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^7}{7!}$$

La aproximación al número $e = f(1)$ pedida será

$$P_{7,0}(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{7!} = 2,718253968$$