1. EJERCICIOS

1. Hallar los extremos de las funciones siguientes en las regiones especificadas:

    a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en el intervalo $[-1/2, 3/2]$.
    b) $f(x) = x^2(x-1)^2$ en el intervalo $[-2, 2]$ y en su dominio.
    c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$ en su dominio.
    d) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$ en su dominio.
    e) $f(x) = |x-2|$ en el intervalo $[-1, 3]$.
    f) $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ en el intervalo $[-2, 4]$.
    g) $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ en el intervalo $[-1, 8]$.
    h) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ en el intervalo $[-1, 2]$ y en su dominio.
    i) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
    j) $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.
    k) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x - \cos 2x$ en su dominio.
    l) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y en su dominio.

2. Dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$
    b) $f(x) = 1 + \frac{x^2}{x-1}$
    c) $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x-6)}$
    d) $f(x) = \frac{x^4}{1-x^2}$
    e) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$
    f) $f(x) = \frac{2x^2+1}{(x-1)(x+1)x}$
    g) $f(x) = \frac{4x^2-4x+1}{5x^2-6x+1}$
    h) $f(x) = x\sqrt{x-1}$
    i) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$
    j) $f(x) = x^2 e^{-x}$
    k) $f(x) = xe^{1/x}$
    l) $f(x) = e^{2x/(x^2-1)}$
    m) $f(x) = x \ln x$
    n) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

3. Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y cuyo producto sea el máximo posible.

4. Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que pueda inscribirse en una semicircunferencia de radio a.

5. Un alambre de longitud L debe cortarse en 2 trozos, formándose con uno de ellos un cuadrado y con el otro una circunferencia. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas encerradas por los dos trozos sea máxima? ¿Y para que sea mínima?

6. Al precio de 1,50 € un comerciante puede vender 500 botes de refresco que le cuestan 70 céntimos cada uno. Por cada céntimo que rebaja el precio, el número de refrescos vendidos aumenta en 25.¿Qué precio de venta maximiza el beneficio?

7. Determínese si las funciones f y g son derivables en $x = 0$, siendo

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

8. Calcular, utilizando la noción de límite, las derivadas de las siguientes funciones:

   1. $f(x) = 1 - 3x^2$ 2. $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$
   3. $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$ 4. $f(x) = \frac{3+x}{1-3x}$

9. Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones:

   1. $f(x) = ((e^x - \operatorname{tg}^2 x) \cos^2 x)^2$ 2. $f(x) = e^x \operatorname{sen}^3 x$
   3. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)$ 4. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$
   5. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$ 6. $f(x) = e^x(\operatorname{tg} x - x)$
   7. $f(x) = \cos(x^3)$ 8. $f(x) = \cos^3 x$
   9. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ 10. $f(x) = \left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^9$
   11. $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$ 12. $f(x) = \cos(\operatorname{tg} x)$
   13. $f(x) = 2x \operatorname{arc\,tg}(2x) - \ln(\sqrt{1 + 4x^2})$ 14. $f(x) = \ln\left(\frac{2 \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x + 2}\right)$

10. Encuéntrese la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto especificado

    a) $y = \operatorname{tg} x$, $(\pi/4, 1)$ b) $y = 2 \operatorname{sen} x$, $(\pi/6, 1)$

11. Determinar $y'(x)$ mediante derivación implícita, sabiendo que $x^3 + y^3 = 6xy$ y calcular la recta tangente a la curva determinada por la ecuación (folio de Descartes) en el punto $(3, 3)$. Determinar $y'(x)$ sabiendo que $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

12. Calcúlese, aplicando la derivación implícita, $y'(x)$ siendo $y = \operatorname{arc\,sen} x$.

13. Derívense, aplicando derivación logarítmica, las siguientes funciones:

    a) $y = x^{\sqrt{x}}$ b) $y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ c) $y = (\operatorname{sen} x)^x$
    d) $y = (\ln x)^x$ e) $y = (1 + x)^{\ln(1+x)}$

14. Dada $f(x) = \ln x$, utilícese que $f'(1) = 1$ para probar que

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

15. Dada la función $f(x) = \sqrt{x+3}$, utilícese la diferencial dy para obtener una aproximación al valor de $\sqrt{4,05}$. Hágase lo mismo con $f(x) = \ln x$ para obtener una aproximación a $\ln(0,9)$.

16. Pruébese, aplicando el teorema del valor medio, que la ecuación $e^x - x - 1 = 0$ tiene una única solución real.

17. Calcúlense los siguientes límites haciendo uso de la regla de L'Hôpital:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sec x - \operatorname{tg} x)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$ i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$ k) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ l) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-\ln x)$

18. Calcúlense los polinomios de Taylor siguientes:

a) Polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $a = 0$. Dar un valor aproximado de $\sqrt{1,02}$ utilizando un polinomio de orden 2 y obtener una estimación del error cometido.

b) Polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ en $a = 0$. Dar un valor aproximado de $\ln 3$ utilizando un polinomio de orden 3.

c) Fórmula general del polinomio de Taylor de orden n de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = \pi/6$.

d) Fórmula general del polinomio de Taylor de orden n de $f(x) = e^x$, en $a = 0$. Dar un valor aproximado del número e utilizando el polinomio de orden 7 obtenido.