Tema 8: Derivación.

José M. Salazar

Noviembre de 2016

Tema 8: Derivación.

- Lección 9. Derivación: teoría fundamental.
- Lección 10. Aplicaciones de la derivación.

Índice

1. Derivadas. Principales nociones y resultados.
   - Definición de derivada en un punto e interpretación.
   - Función derivada y cálculo para algunas funciones elementales.
   - Propiedades de las derivadas. Derivada de la función inversa, derivación implícita y logarítmica.
   - Derivadas de principales funciones elementales.
2. Teoremas principales sobre derivación.
   - Teoremas de Rolle y del valor medio.
   - Teorema del valor medio generalizado de Cauchy.

Ejemplo introductorio

Ejemplo

Un objeto ejerce una fuerza sobre una superficie elástica en la que provoca ondas circulares cuyo radio crece a un ritmo constante de un metro por segundo. Nos preguntamos a qué ritmo está cambiando el área de la onda, $A(t)$, cuando han pasado t_1 segundos.

La tasa de variación media del área en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ es

$$\frac{A(t_2) - A(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\pi(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} = \pi(t_2 + t_1)$$

Cuando $t_2 \to t_1$, obtenemos el límite

$$A'(t_1) = \lim_{t \to t_1} \frac{A(t) - A(t_1)}{t - t_1} = \lim_{t \to t_1} \pi(t + t_1) = 2\pi t_1,$$

que llamamos derivada, o tasa de variación instantánea, de A en t_1.

Definición de derivada

Definición (Derivada)

Sea f una función definida en un intervalo abierto I con $a \in I$. Decimos que f es derivable en a *o* diferenciable en a *si existe y es real el límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \in \mathbb{R}$$

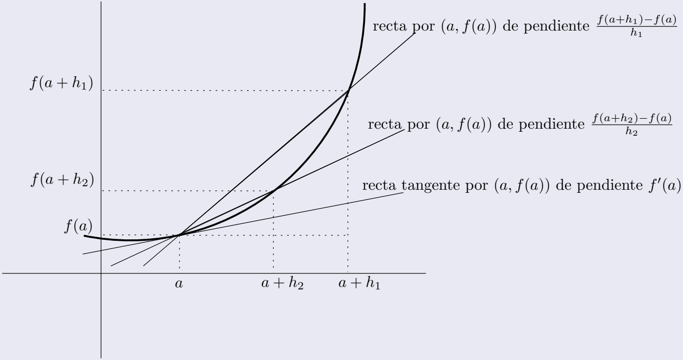
A $f'(a)$ se le denomina derivada de f en a *y también se denota por*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivada como pendiente

Observación (Recta tangente a la gráfica de f)

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es precisamente $m = f'(a)$. La ecuación de dicha recta es, por tanto, $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.



Derivadas laterales

Definición (Derivadas laterales)

Si f está definida en un intervalo a la derecha de a, $[a, a+\epsilon)$, o a la izquierda de a, $(a-\epsilon, a]$, los números

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

en caso de existir, se denominan derivada por la derecha de a y derivada por la izquierda de a, respectivamente.

Proposición

La derivada $f'(a)$ existe si y sólo si existen y son iguales $f'_+(a) = f'_-(a)$.

Función derivada

Definición (Función derivada)

La función f es derivable en un intervalo abierto I si lo es en todos sus puntos. Si f es derivable en I, la función que en cada punto $x \in I$ toma el valor $f'(x)$ se denomina función derivada *de f y se denota por $f' = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'$.*

Teorema

Si f es derivable en a, entonces es continua en a.

Ejemplos de derivadas de funciones elementales

Teorema

- $\frac{d}{dx}(c) = 0.$
- $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x.$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x.$

Operaciones con funciones y propiedades de las derivadas

Propiedades

- *Sean f, g derivables en a y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces $f \pm g$, cf, fg también son derivables en a cumpliendo:*
  - $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.
  - $(cf)'(a) = cf'(a)$.
  - $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

  Si, además, $g(a) \neq 0$, entonces f/g es derivable en a y
  - $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.
- Regla de la cadena. *Si f es derivable en a y g lo es en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es derivable en a y*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Derivada de la función inversa

Teorema (Derivada de la función inversa)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona en un intervalo abierto I. Si f es derivable en $a \in I$ con $f'(a) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(a)$ y

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Derivación implícita y logarítmica

Observación (Derivación implícita)

Se dice que la función $y = f(x)$ está definida implícitamente si la relación entre x e y no se puede explicitar y viene dada por una relación del tipo $F(x, y) = 0$. La regla de la cadena permite calcular $y'(x)$ sin conocer $y(x)$ derivando $\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = 0$.

Observación (Derivación logarítmica)

Para determinadas funciones $y = f(x)$ compuestas por productos, cocientes y potencias de otras, y cuya derivada se desea calcular, puede ser útil la derivación logarítmica. El procedimiento es el siguiente:

- *Se toman logaritmos en $y = f(x)$, quedando $\ln(y) = \ln(f(x))$, y se simplifica $\ln(f(x))$ con las propiedades de los logaritmos.*
- *Se deriva implícitamente con respecto a x: $\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(\ln(f(x)))$.*
- *Se despeja y'.*

Más ejemplos de derivadas de funciones elementales

Teorema

- *Las derivadas de las funciones trigonométricas se obtienen de las propiedades vistas.*
- $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$. *En particular,* $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$.
- $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln(a)$ *para todo* $a > 0$. *En particular,* $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$.
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Teoremas de Rolle y del valor medio

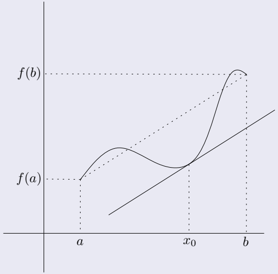
Teorema (Teorema de Rolle)

Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y con $f(a)=f(b)$, entonces existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0)=0$.

Teorema (Teorema del valor medio)

Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Teorema del valor medio generalizado de Cauchy

Ejemplos (Teorema del valor medio generalizado de Cauchy)

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), existe algún $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$$

Si, además, $g(a) \neq g(b)$ y $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$, se tiene

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$