# Tema 8: Derivación.

**José M. Salazar**

Noviembre de 2016

# Tema 8: Derivación.

- Lección 9. Derivación: teoría fundamental.
- Lección 10. Aplicaciones de la derivación.

# Índice

# Ejemplo introductorio

## Ejemplo

*Encontrar el trayecto de mínimo coste para un tendido eléctrico que abastece de energía una zona habitada. Desde la central hasta la zona debe atravesarse un río de* 0.5 *km de ancho y la población está* 6 *km río abajo.*
*Coste del tendido:* 12 € *por tierra y* 16 € *bajo el agua.*
*La función coste* $C : [0, 6] \to (0, \infty)$ *se define así:*

$$C(x) = 16\left(\sqrt{0.5^2 + x^2}\right) + 12(6 - x)$$

$$C'(x) = 8(0.5^2 + x^2)^{-1/2}(2x) - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2\sqrt{7}}$$

*Se tienen* $6 - \frac{3}{2\sqrt{7}}$ *km de recorrido por tierra y* $\sqrt{0.5^2 + 9/28}$ *km de recorrido bajo el agua.*
*Para afirmar que el coste es el mínimo, basta comparar* $C(\frac{3}{2\sqrt{7}})$ *con* $C(0)$ *y* $C(6)$*.*

# Extremos absolutos y relativos

**Definición**

*Sea $f$ definida en un intervalo $I$ con $c \in I$. Entonces $f(c)$ es el* valor mínimo *(resp.* valor máximo*)* de $f$ en $I$ *si $f(c) \leq f(x)$ (resp. $f(c) \geq f(x)$) para todo $x \in I$. A estos valores, de existir, se los llama* valores extremos de $f$ en $I$ *o* máximo y mínimo absolutos de $f$ en $I$.

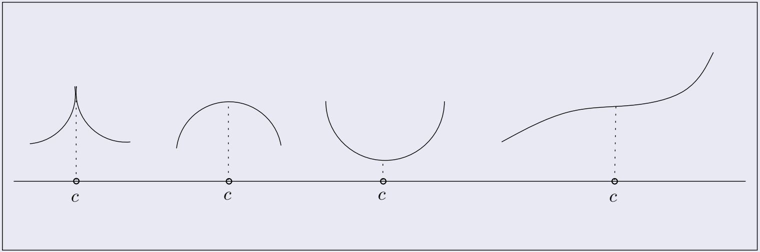
**Definición**

*Si existe un intervalo abierto $(a, b) \subset I$ que contiene a $c$ y en el que $f(c)$ es máximo (resp. mínimo) absoluto, entonces $f(c)$ se llama* máximo relativo (resp. mínimo relativo) de $f$.

# Puntos críticos

## Definición (Punto crítico)

*Un punto $c \in I$ es un* punto crítico *de $f$ si $f$ no es derivable en $c$ ó $f'(c) = 0$.*



# Puntos críticos

## Teorema

*Si $f$ tiene un extremo relativo en $x = c$, entonces $c$ es un punto crítico de $f$.*

## Observación

*Si $f$ es continua en $I = [a, b]$, por el teorema de Weierstrass, los extremos absolutos se alcanzan. Para detectar los extremos relativos y absolutos, se evalúa $f$ en los puntos críticos de $(a, b)$, y en los extremos $a$ y $b$.*

# Crecimiento y decrecimiento

## Definición

*Una función $f$ es* estrictamente creciente *(resp.* estrictamente decreciente*) en un intervalo $I$ si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ de $I$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$). De esta función decimos que es estrictamente monótona en $I$.*

## Teorema

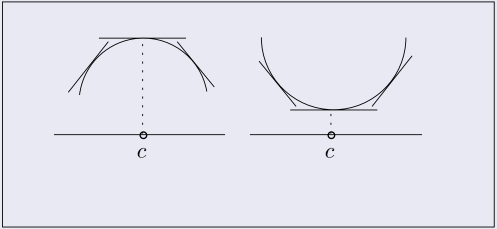
*Sea $f$ derivable en $I = (a, b)$. Entonces:*

- *Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) para todo $x \in I$, $f$ es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en $I$.*
- *Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, $f$ es constante en $I$.*

# Criterio de la primera derivada

## Teorema (Criterio de la primera derivada)

*Sea $f$ continua en $I = (a, b)$ y sea $c \in I$ un punto crítico de $f$. Supongamos que $f$ es derivable en un entorno de $c$ salvo, quizá, en el propio $c$. Entonces:*
*Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa (resp. de negativa a positiva) en $c$, $f(c)$ es un máximo relativo (resp. mínimo relativo) de $f$.*



# Concavidad y convexidad

## Definición (Concavidad y convexidad)

*Sea $f$ derivable en un intervalo abierto $I = (a, b)$. La gráfica de $f$ es* cóncava *(resp.* convexa*)* en $I$ *si $f'$ es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en $I$. Un punto $(c, f(c))$ de la gráfica es un* punto de inflexión *si en él se produce un cambio de concavidad a convexidad.*

## Teorema (Criterio de concavidad y convexidad)

*Sea $f$ una función tal que $f''$ existe en un intervalo $I = (a, b)$. Si $f''(x) > 0$ (resp. $f''(x) < 0$) para todo $x \in I$, la gráfica de $f$ es cóncava (resp. convexa) en $I$.*

## Observación

*Si $f$ tiene en $c$ un punto de inflexión, entonces $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe.*

# Criterio de la segunda derivada

**Teorema (Criterio de la segunda derivada)**

*Sea $f'(c) = 0$ de modo que $f''$ existe y es continua en un intervalo que contiene a $c$. Entonces:*

1. *Si $f''(c) > 0$, $f$ tiene en $c$ un mínimo relativo.*
2. *Si $f''(c) < 0$, $f$ tiene en $c$ un máximo relativo.*

*Si $f''(c) = 0$, este criterio no es concluyente y se recurre al de la primera derivada.*

# Regla de L'Hôpital

Para estudiar $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ cuando da formas indeterminadas de tipo $0/0$ o $\infty/\infty$ se dispone de la Regla de L'Hôpital.

## Teorema (Regla de L'Hôpital)

*Sean $f, g$ derivables en un entorno abierto $(a, b)$ que contiene a $c$ (salvo, quizá, en el propio $c$). Si $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ y existe el límite $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*El resultado es válido si $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$, y también lo es si $c = \pm\infty$.*

*Si $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ da otra indeterminación $0/0$ ó $\infty/\infty$, se vuelve a aplicar la regla de L'Hôpital de cumplirse las hipótesis.*

# Otras formas indeterminadas

## Observación (Otras formas indeterminadas)

- $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ *con forma indeterminada* $0\cdot\infty$: *se escribe* $fg = \frac{f}{1/g}$.
- $\lim_{x\to c} (f(x) - g(x))$ *con forma indeterminada* $\infty - \infty$: *se convierte la resta en un cociente usando denominador común, racionalizando o sacando un factor común.*
- $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}$ *con formas indeterminadas* $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$: *Se aplican logaritmos a* $y = f(x)^{g(x)}$, *quedando un producto* $\ln y = g(x)\ln f(x)$.

# Elementos de una gráfica

**Observación (Elementos de una gráfica)**

1. Dominio *de* $f$,

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$$

*y* recorrido *o* conjunto imagen *de* $f$,

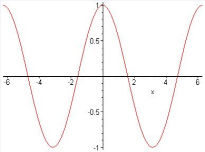
$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in Dom(f) \text{ con } f(x) = y\}$$

2. Cortes con los ejes *$OX$ y $OY$.*
3. Periodicidad. *Menor valor $T$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para cualquier $x \in Dom(f)$.*

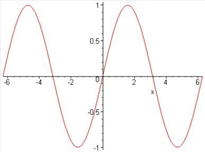
# Elementos de una gráfica

## Observación (Elementos de una gráfica)

4. Simetrías. *Simetría par si* $f(-x) = f(x)$ *para todo* $x \in Dom(f)$




*Simetría impar si* $f(-x) = -f(x)$ *para todo* $x \in Dom(f)$.



# Elementos de una gráfica

**Observación (Elementos de una gráfica)**

5. Asíntotas.
    - Asíntota horizontal $\{y = a\}$: *existe si* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$.
    - Asíntota vertical $\{x = a\}$: *existe si* $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.
    - Asíntota oblicua $\{y = mx + n\}$: *existe si* $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$. *Se obtiene calculando* $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ *y* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = n$.
6. Puntos críticos. Crecimiento, decrecimiento y extremos.
7. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

# Polinomio de Taylor

## Definición (Polinomio de Taylor)

*Si $f$ es una función con derivadas hasta el orden $n$ en un punto $a$, entonces existe un polinomio único, $P(x)$, de grado menor o igual que $n$ tal que*

$$P(a) = f(a),\ P'(a) = f'(a),\ \ldots,\ P^{n)}(a) = f^{n)}(a).$$

*Dicho polinomio, denotado por $P_{n,a}(x)$, viene determinado por la expresión*

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

*Al polinomio anterior se le llama* polinomio de Taylor de orden $n$ *de la función $f$ en el punto $a$.*

# Resto de Taylor

**Definición (Resto de Taylor)**

*Si $f$ es una función para la cual existe $P_{n,a}(x)$, se definen el* resto de Taylor de orden $n$ de $f$ en $a$ *y el* error *como*

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x) \qquad Error = |R_{n,a}(x)|$$

# Fórmula de Taylor

## Teorema (Fórmula de Taylor)

*Si las funciones* $f, f', \ldots, f^{n+1)}$ *están definidas sobre* $[a, x]$, *existe* $c \in (a, x)$ *tal que el resto de Taylor de orden* $n$ *de* $f$ *en* $a$ *es*

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{con} \quad \lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

*Esta es la* forma de Lagrange del resto. *La fórmula de Taylor es*

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x).$$

*Cuando la fórmula de Taylor se desarrolla en el punto* $a = 0$, *obtenemos la* fórmula de McLaurin*:*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

# Fórmula de Taylor

Probemos la fórmula del resto $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Sea $F(t) = f(x) - f(t) - (x-t)f'(t) - \cdots - \dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{n)}(t)$ para $t \in [a, x]$.

Obsérvese que $F(t) = f(x) - P_{n,t}(x) = R_{n,t}(x)$. Se tiene

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1)}(t).$$

Dada la función auxiliar

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{n+1} F(a)$$

se tiene que $G(a) = G(x) = 0$. Aplicando el teorema de Rolle, existe $c \in [a, x]$ tal que

$$0 = G'(c) = F'(c) + (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}} F(a)$$

# Fórmula de Taylor

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
R_{n,a}(x) = F(a) &= -\frac{1}{n+1}\frac{(x-a)^{n+1}}{(x-c)^n}F'(c) \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(x-a)^{n+1}}{(x-c)^n}\frac{(x-c)^n}{n!}f^{n+1)}(c) \\
&= \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}
\end{aligned}
$$

# Desarrollos de Taylos frecuentes

## Ejemplos (Desarrollos de Taylor frecuentes)

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n.$
- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n.$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R_n.$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n.$

# Aplicación: clasificación de puntos críticos

**Teorema (Clasificación de puntos críticos)**

*Si existen y son continuas en un intervalo que contiene a $c$ todas las derivadas hasta $f^{n)}$, con $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{n-1)}(c) = 0$ y $f^{n)}(c) \neq 0$, se tiene:*

- *Si $n$ es par y $f^{n)}(c) > 0$ , $f$ tiene un mínimo relativo en $c$.*
- *Si $n$ es par y $f^{n)}(c) < 0$ , $f$ tiene un máximo relativo en $c$.*
- *Si $n$ es impar, $f(x) - f(c)$ cambia de signo al pasar por $c$.*