1. PRELIMINARES

1.1. CÁLCULO DEL RANGO POR EL MÉTODO DE GAUSS

Definición 1. *Una matriz es* escalonada *si:*

1. Todas las filas nulas, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.

2. El número de ceros al comienzo de una fila no nula es estrictamente menor que el número de ceros al comienzo de la fila inferior.

El primer elemento no nulo de cada fila (en caso de tenerlo) se llama cabecera de la fila*.*

Un ejemplo de matriz escalonada es

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Supongamos que la matriz escalonada cumple, además:

3. Todas las cabeceras de filas son unos.

4. En las columnas en las que están las cabeceras de las filas, todos los demás elementos son nulos.

Entonces se dice que la matriz es escalonada reducida*.*

Veamos algunos ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son matrices escalonadas reducidas mientras que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es escalonada pero no es escalonada reducida.

Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, llamamos *operaciones elementales sobre las filas de A* a las siguientes manipulaciones:

1. Intercambiar la posición de dos filas.

2. Sustituir la fila i-ésima por k veces ella más k' veces la j-ésima, con $k \neq 0$.

Algoritmo. Dada una matriz A, reduzcámosla mediante operaciones elementales sobre las filas a forma escalonada y a forma escalonada reducida.

Paso 1. Si A^{j_1} es la primera columna de A con una entrada no nula, intercambiamos, si es necesario, filas para que $a_{1j_1} \neq 0$.

Paso 2. Utilizamos a_{1j_1} como pivote para obtener ceros bajo él.

Paso 3. Se repiten los pasos 1 y 2 con la submatriz obtenida de quitar la primera fila.

Paso 4. Se repite el proceso hasta que la matriz quede en forma escalonada.

Si, además, buscamos obtener la matriz escalonada reducida, continuamos con los pasos siguientes:

Paso 5. Se multiplica la última fila no nula A_r (con cabecera a_{rj_r}) por $1/a_{rj_r}$ de forma que la cabecera se convierta en 1.

Paso 6. Se utiliza $a_{rj_r} = 1$ como pivote para obtener ceros sobre él.

Paso 7. Se repiten los pasos 5 y 6 para las filas $A_{r-1}, A_{r-2}, \ldots, A_2$.

Paso 8. Multiplicar A_1 por $1/a_{1j_1}$ (a_{1j_1} es la cabecera de la fila A_1).

Hacemos observar que la matriz escalonada asociada a A no es única, mientras que la escalonada reducida sí lo es.

Definición 2. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se llama* menor de orden r *de A al determinante de la matriz formada por la intersección de r filas y r columnas de A. El* rango *de A es r si existe un menor de orden r de A no nulo y todos los menores de orden mayor que r son nulos.*

Observación 1. *El rango de una matriz A es invariante por operaciones elementales sobre sus filas y resulta ser igual al número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada asociada a A.*

1.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Definición 3. *Una expresión de la forma*

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

donde los a_{ij} (coeficientes) y los b_i (términos independientes) son números reales se denomina sistema de m ecuaciones lineales *con n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$. Una* solución *de (I) son n números $(s_1, \ldots, s_n)$ tales que al sustituir por $(x_1, \ldots, x_n)$, se cumplen las igualdades de (I).*

Al sistema (I) también lo denotamos matricialmente por $A\bar{x} = \bar{b}$, esto es,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

se las llama matriz de coeficientes *y* matriz ampliada de coeficientes *de (I).*

Dado un sistema de ecuaciones lineales $A\bar{x} = \bar{b}$, diremos que es *compatible* si tiene alguna solución e *incompatible* si no tiene ninguna. En caso de ser compatible, diremos que es *compatible determinado* si la solución es única y *compatible indeterminado* si tiene más de una solución.

Discutir un sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ será determinar a cuál de los tipos mencionados pertenece.

Diremos de un sistema que es *homogéneo* si cada término independiente es cero ($b_1 = \cdots = b_m = 0$). Lo denotaremos por $A\bar{x} = \bar{0}$.

Obsérvese que todo sistema homogéneo es compatible (siempre existe la solución trivial $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$).

Si alguno de los términos independientes es distinto de cero, el sistema se dice *no homogéneo.*

1.2.1. Método de eliminación de Gauss

Dos sistemas de ecuaciones lineales se dicen *equivalentes* si tienen las mismas soluciones. A continuación veremos cómo determinar las soluciones de un sistema de ecuaciones transformándolo en otro equivalente, que resolveremos con mayor facilidad.

Si (I) $A\bar{x} = \bar{b}$ es un sistema que deseamos resolver, consideramos la matriz de coeficientes ampliada $\bar{A}$ asociada a (I) y, realizando operaciones elementales sobre sus filas, la transformamos en una matriz escalonada E. El sistema de ecuaciones (II) asociado a E será equivalente a (I) $A\bar{x} = \bar{b}$, ya que las operaciones elementales sobre las filas no modifican las soluciones de los sistemas resultantes. Bastará entonces resolver (II) para tener las soluciones de (I). Éste es el denominado *método de eliminación de Gauss.* Si en vez de reducir $\bar{A}$ a forma escalonada, la reducimos a forma escalonada reducida y resolvemos el sistema asociado, estaremos utilizando el *método de eliminación de Gauss-Jordan.*

1.2.2. Discusión de sistemas de ecuaciones lineales

Teorema 1. *(Rouché-Frobenius)*

Dado un sistema (I) $A\bar{x} = \bar{b}$ de m ecuaciones con n incógnitas, se verifica:

1. El sistema es compatible si $r(A) = r(\bar{A})$. Será compatible determinado si $r(A) = r(\bar{A}) = n$ y compatible indeterminado si $r(A) = r(\bar{A}) < n$.

2. El sistema es incompatible si $r(A) < r(\bar{A})$.

1.2.3. Regla de Cramer

Sea (I) $A\bar{x} = \bar{b}$ un sistema de n ecuaciones con n incógnitas ($A \in M_n(\mathbb{R})$) con A invertible.

Entonces (I) es compatible determinado y las soluciones de (I) son de la forma:

$$x_1 = \frac{Det(\bar{b}, A^2, \ldots, A^n)}{Det(A)}, \quad \ldots \quad , x_n = \frac{Det(A^1, \ldots, A^{n-1}, \bar{b})}{Det(A)},$$

siendo A^i la columna i-ésima de A para $i = 1, \ldots, n$.

1.3. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. Dadas tres matrices cuadradas A, B, C iguales, salvo que la i-ésima fila (columna) de A es igual a la suma de las i-ésimas filas (columnas) de B y C, entonces:

$$det(A) = det(B) + det(C)$$

2. Si una matriz cuadrada A tiene dos filas (columnas) iguales o proporcionales, entonces $det(A) = 0$.

3. Dada una matriz cuadrada A y dada la matriz B obtenida de intercambiar en A la posición de dos filas (columnas), entonces $det(B) = -det(A)$.

4. Dada una matriz cuadrada A y dada la matriz B obtenida de multiplicar los elementos de una fila (columna) de A por un escalar k, entonces $det(B) = k\, det(A)$. Esto implica que si A tiene una fila (columna) de ceros, entonces $det(A) = 0$.

5. Dada una matriz cuadrada A y dada la matriz B obtenida de sumar a una fila (columna) de A otra fila (columna) multiplicada por un escalar k, entonces $det(A) = det(B)$.

6. Una matriz cuadrada A es regular si y sólo si $det(A) \neq 0$.

7. Dadas A y B matrices cuadradas, $det(AB) = det(A)det(B)$.

8. Dada una matriz cuadrada A, $det(A) = det(A^t)$

9. El determinante de una matriz cuadrada A puede obtenerse desarrollando por cualquiera de sus filas o columnas:

$$det(A) = a_{i1}\alpha_{i1} + \cdots + a_{in}\alpha_{in} = a_{1j}\alpha_{1j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj}$$

1.4. EJERCICIOS

HOJA DE PROBLEMAS BÁSICOS DE ÁLGEBRA.

1º) CALCULAR EL RANGO DE LAS MATRICES POR EL METODO DE GAUSS.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&4\\2&4&7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-4&2&-1\\3&-12&6&-3\\2&-1&0&1\\0&1&3&-1\end{pmatrix}.\quad C=\begin{pmatrix}1&1&2&2&-1\\1&2&0&3&1\\1&0&4&1&-3\\2&1&6&3&-4\end{pmatrix}$$

2º) RESOLVER APLICANDO EL MÉTODO GAUSS-JORDAN. (O EL DE GAUSS)

a) $\begin{cases}3x+y+z=-1\\x-3y+z=-9\\x-y+4z=3\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x-4y+2z=0\\2x-3y+z=0\\2x-y+3z=0\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+2y+3z=1\\x+3y-z=4\\x+3y+z=2\\x+2y+4z=0\end{cases}$

d) $\begin{cases}3x+y+z=-1\\x-3y+z=-9\\x-y+4z=3\end{cases}$ e) $\begin{cases}x-2y+z=1\\-x+y-2z=-1\\2x-3y+3z=2\end{cases}$ f) $\begin{cases}x+2y+z=0\\-x+4y+3z+2t=0\\x+7y+7z+4t=0\\2x+2z+t=0\end{cases}$

3º) DISCUTIR LOS SISTEMAS SEGÚN LOS VALORES DE LOS PARÁMETROS Y RESOLVERLOS CUANDO SEA POSIBLE:

a) $\begin{cases}x+ay+z=-2\\ax+y+z=-2\\x+y+az=-2\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+ay-az=0\\12x-(a+2)y-2z=0\\ax-2y+z=0\end{cases}$ c) $\begin{cases}ax+y+z+t=0\\x+(1+a)y+z+t=0\\x+y+(2+a)z+t=0\\x+y+z+t=0\end{cases}$

d) $\begin{cases}ax+y+bz=1\\x+ay+z=0\\x+y+bz=1\end{cases}$ e) $\begin{cases}2x+y=1\\x+y-2z=1\\3x+y+az=b\end{cases}$ f) $\begin{cases}x+ay+a^2z=1\\x+ay+abz=a\\bx+ay+a^2bz=a^2b\end{cases}$

4º) CALCULAR EL VALOR DE LOS DETERMINANTES

a) $\begin{vmatrix}1&x&x&x\\2&1&2x&2x\\2&2&1&2x\\2&2&2&1\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1&-2&-1&1\\-1&3&-2&-2\\2&0&1&1\\1&-2&2&-2\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&1+a_1&1&\cdots&1\\1&1&1+a_2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\\1&1&1&&1+a_n\end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\-1&0&1&\cdots&1\\-1&-1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&-1&\cdots&0\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}-4&1&1&1&1\\1&-4&1&1&1\\1&1&-4&1&1\\1&1&1&-4&1\\1&1&1&1&-4\end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix}1&a&b+c\\1&b&c+a\\1&c&a+b\end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix}1&n&n&n&\cdots&n\\n&2&n&n&\cdots&n\\n&n&3&n&\cdots&n\\n&n&n&4&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&n&&n\end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix}a^2&ab&ab&b^2\\ab&a^2&b^2&ab\\ab&b^2&a^2&ab\\b^2&ab&ab&a^2\end{vmatrix}$

i) CALCULAR EL DETERMINANTE DE LA MATRIZ $(a_{ij})_{\substack{i=1\ldots4\\j=1\ldots4}}$ donde $a_{ij}=(i+j)\,2^{i+j}$