1. ESPACIOS VECTORIALES

1.1. ESPACIOS VECTORIALES. SUBESPACIOS VECTORIALES

Definición 1. *(Espacio vectorial)*

Decimos que un conjunto no vacío V es un espacio vectorial *sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, o $\mathbb{K}$-espacio vectorial, si en él se han definido dos operaciones, una interna y otra externa, llamadas respectivamente* suma *y* producto por un escalar *que pasamos a describir.*

La suma de dos elementos (o vectores) $u, v \in V$ da lugar a otro elemento de V, que denotamos $u + v$, y que tiene las propiedades:

(S1) Asociativa: $(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V$.

(S2) Conmutativa: $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$.

(S3) Existencia de elemento neutro: $\exists \bar{0} \in V$ *tal que* $\bar{0} + v = v + \bar{0} = v \, \forall v \in V$

(S4) Existencia de elemento opuesto: $\forall v \in V$ *existe otro vector* $-v \in V$ *tal que* $v + (-v) = \bar{0}$.

El producto de un escalar, o elemento del cuerpo $\mathbb{K}$, por un vector da lugar a otro elemento de V, y tiene las propiedades:

(M1) $a(u+v) = au+av$ *para todo* $a \in \mathbb{K}$ *y para todo par de vectores* $u, v \in V$.

(M2) $(a + b)u = au + bu$ *para todo par de escalares* $a, b \in \mathbb{K}$ *y para todo* $u \in V$.

(M3) $a(bu) = (ab)u$ *para todo* $u \in V$ *y* $a, b \in \mathbb{K}$.

(M4) $1u = u$ *para todo* $u \in V$*, donde* 1 *es la unidad para el producto en* $\mathbb{K}$.

Las primeras cuatro propiedades hacen referencia a la suma de vectores y se resumen diciendo que $(V, +)$ es un *grupo conmutativo*.

Trabajaremos habitualmente con el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si bien todos los resultados que se obtienen en este capítulo son válidos en cualquier cuerpo $\mathbb{K}$.

Observación 1. *De las propiedades enunciadas se deducen las siguientes:*
1. $0u = \bar{0}$, *2.* $a\bar{0} = \bar{0}$, *3. Si* $au = \bar{0}$*, entonces* $a = 0$ *ó* $u = \bar{0}$,
4. $(-a)u = a(-u) = -(au)$.

Definición 2. *(Subespacio vectorial)*

Un subconjunto W del espacio vectorial V es un subespacio vectorial *de V si cumple:*

i) W es cerrado para la suma: si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$.

ii) W es cerrado para el producto por escalares: si $u \in W$ y $a \in \mathbb{K}$, entonces $au \in W$.

Estas dos condiciones se pueden resumir en una escribiendo:

iii) $au + bv \in W$ para todo $u, v \in W$ y $a, b \in \mathbb{K}$.

Observación 2.

1. *Si W es un subespacio vectorial de V, entonces $\bar{0} \in W$.*
2. *Todo subespacio vectorial W de V tiene asimismo estructura de espacio vectorial con las mismas operaciones que V.*

Definición 3. *(Combinación lineal)*

Diremos que un vector $v \in V$ es combinación lineal *de la familia $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ si $v = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$ con $a_i \in \mathbb{K}$ para todo $i = 1, \ldots, m$.*

Sea S un subconjunto del espacio vectorial V y sea $L(S)$ el conjunto formado por todas las combinaciones lineales de elementos de S:

$$L(S) = \{a_1v_1 + \cdots + a_mv_m \text{ tal que } m \in \mathbb{N}, v_i \in S, a_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, m\}$$

Al conjunto $L(S)$ se le llama *envolvente lineal* de S o *subespacio generado* por S y es el menor subespacio vectorial de V que contiene al conjunto S, esto es, si $S \subset W$, con W un subespacio vectorial de V, entonces $L(S) \subset W$.

1.2. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL. BASES

Definición 4. *(Dependencia e independencia lineal)*

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $v_1 \ldots, v_m \in V$. Se dice que la familia de vectores $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ es linealmente dependiente *si existen $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que:*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = \bar{0}$$

o, dicho de otro modo, si existe un vector $v_i \in S$ que se puede poner como combinación lineal del resto.

Se dice que el conjunto de vectores $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ es linealmente independiente *si no es linealmente dependiente, esto es, de ser cierta la igualdad*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = \bar{0},$$

entonces $a_1 = \cdots = a_m = 0$. Esto equivale a decir que ningún vector de S se puede poner como combinación lineal del resto.

Observación 3.

1. *$\{v_1\}$ es l.i. (linealmente independiente) si y sólo si $v_1 \neq \bar{0}$.*

2. *Si* $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *es l.d. (linealmente dependiente), entonces*

$$\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+r}\}$$

   también es l.d..

3. *Si* $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+r}\}$ *es l.i., entonces* $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *es l.i..*

Definición 5. *(Sistema de generadores)*
Un conjunto de vectores $S \subset V$ *es un* sistema de generadores *del espacio vectorial* V *si* $L(S) = V$.

Propiedades.

1. Si $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ es un sistema de generadores de V, con v_i combinación lineal de los restantes vectores, entonces $\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m\}$ es también un sistema de generadores de V.
2. Si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ son l.i., entonces cualquier sistema de generadores de V tendrá, al menos, m elementos.

Definición 6. *(Base)*
Una familia de vectores $B \subset V$ *es una* base *del espacio vectorial* V *si es linealmente independiente y sistema de generadores de* V.

Si V *admite una base finita* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *de* n *vectores, lo llamaremos* espacio vectorial de dimensión finita*. Diremos que la dimensión de* V *es* n*,* $dim(V) = n$.

Propiedades. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n. Entonces:

1. Cada vector $v \in V$ se podrá escribir de modo único como combinación lineal de los elementos de cualquier base.
2. (Teorema de la base) Todas las bases de V tienen n vectores.
3. (Teorema de ampliación de la base) Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una familia de vectores l.i. de V. Entonces S se puede ampliar a otra familia $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ que es una base de V.
4. Si $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ son n vectores de V linealmente independientes, entonces son también base de V.
5. Si $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ contiene más de n vectores, S es linealmente dependiente.
6. Si $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ es sistema de generadores de V, cualquier número máximo de vectores linealmente independientes de S es base de V.
7. Una familia de vectores $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ es base de un subespacio vectorial $W \subset V$ si S es linealmente independiente y $L(S) = W$.

1.3. SUBESPACIO GENERADO POR LAS FILAS DE UNA MATRIZ

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Las filas de A,

$$A_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \quad \dots \quad , A_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$$

pueden verse como vectores de $\mathbb{K}^n$ y, por tanto, podemos decir que generan un subespacio de $\mathbb{K}^n$ llamado *espacio fila de* A y que denotamos por $F(A)$, esto es:

$$F(A) = L(A_1, \dots, A_m).$$

Propiedades.

1. Si al realizar operaciones elementales sobre las filas de A obtenemos una nueva matriz B, entonces $F(A) = F(B)$.

2. Si E es una matriz escalonada asociada a A, entonces los vectores fila no nulos de E son base de $F(A) = F(E)$.

3. Para saber si dos subespacios engendrados por dos familias de vectores de $\mathbb{K}^n$ son iguales, basta ver si las dos matrices cuyas filas son las coordenadas de los vectores de las dos familias dan lugar a la misma matriz escalonada reducida.

4. El rango de una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ coincide con el número máximo de vectores fila l.i. (la dimensión de $F(A)$), y con el número máximo de vectores columna l.i..

1.4. ECUACIONES CARTESIANAS Y PARAMÉTRICAS DE UN SUBESPACIO

Dado un sistema homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas (I) $A\bar{x} = \bar{0}$, con $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, y dado el conjunto $W = \{\text{soluciones de (I)}\}$, a (I) lo llamaremos *ecuaciones cartesianas* (o *implícitas*) de W.

Propiedades.

1. W es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ con $dim(W) = n - r$ siendo r el rango de A.

2. El sistema homogéneo (II) $B\bar{x} = \bar{0}$, con B una matriz obtenida de A mediante operaciones elementales sobre las filas, es *equivalente* a (I), esto es, tiene las mismas soluciones. Reduciremos el problema de resolver (I) al de resolver (II) $E\bar{x} = \bar{0}$ con E una matriz escalonada asociada a A.

Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ con $dim(W) = m \leq n$ y sea $B_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base de W con $w_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ para $i = 1, \ldots, m$. Entonces cualquier vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in W$ se escribe como $(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1(a_{11}, \ldots, a_{n1}) + \cdots + \lambda_m(a_{1m}, \ldots, a_{nm})$.

Si igualamos las coordenadas, quedan las *ecuaciones paramétricas* de W:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1m}\lambda_m \\ & \vdots & \\ x_n & = & a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots + a_{nm}\lambda_m \end{array}\right.$$

Como vemos, a partir de una base de W obtenemos automáticamente las ecuaciones paramétricas.

1.5. SUMA E INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS. SUMA DIRECTA

Definición 7. *(Intersección de subespacios vectoriales)*

Sean U y W subespacios vectoriales de V. La intersección *de U y W, $U \cap W$, es el conjunto*

$$U \cap W = \{v \in V \textit{ tal que } v \in U \textit{ y } v \in W\}$$

Propiedades.

1. $U \cap W$ es un subespacio vectorial de V. En general, tendremos que la intersección de cualquier familia de subespacios vectoriales de V, $\bigcap_i U_i$, es un subespacio vectorial de V.
2. Si U y W son subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^n$, las ecuaciones cartesianas de $U \cap W$ serán las ecuaciones resultantes de unir las de U y las de W.

Definición 8. *(Suma de subespacios vectoriales)*

Dados U, W subespacios vectoriales de V, llamamos suma *de U y W, denotada por $U + W$, al conjunto*

$$U + W = \{u + w \textit{ tal que } u \in U, w \in W\}$$

Propiedades.

1. $U + W$ es un subespacio vectorial de Vque contiene al conjunto $U \cup W$. De hecho, es el menor subespacio vectorial que contiene a $U \cup W$, esto es, $U + W = L(U \cup W)$.
2. De manera análoga se puede definir la suma de cualquier familia de subespacios vectoriales $\{U_i\}$ de V como $\sum_i U_i = L(\bigcup_i U_i)$.
3. (Fórmula de las dimensiones) Si V es de dimensión finita y U, W son subespacios vectoriales suyos, entonces $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$.

Definición 9. *(Suma directa de dos subespacios)*
Un espacio vectorial V es suma directa de los subespacios U, W, escrito $V = U \oplus W$, si $U \cap W = \{\bar{0}\}$ y $V = U + W$.

Es fácil probar que $V = U \oplus W$ si y sólo si cada vector $v \in V$ se escribe de modo único como $v = u + w$ para ciertos $u \in U$ y $w \in W$.

También es posible definir la *suma directa para más de dos subespacios vectoriales*. Decimos que V es suma directa de los subespacios vectoriales $U_1, \ldots, U_n$, escrito $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$, si todo vector $v \in V$ se puede escribir de modo único como $v = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, con $u_i \in U_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. De manera equivalente, $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$ si:
1. $V = L(U_1 \cup \cdots \cup U_n)$ y
2. $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{\bar{0}\}$.

1.6. COORDENADAS Y CAMBIO DE BASE

A continuación desarrollamos la herramienta que nos permitirá trabajar en un K-espacio vectorial V de dimensión finita n como si estuvieramos en $\mathbb{K}^n$.

Definición 10. *(Coordenadas de un vector respecto de una base)*
Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de dimensión finita n y dada una base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, cada vector $x \in V$ tiene una única expresión en función de los vectores de B de la forma

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Llamaremos a $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ coordenadas *de x respecto de la base B y lo representaremos por $x_B = (x_1, \ldots, x_n)$.*

Propiedades. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita n y sea B una base de V. Si $x, y \in V$ tienen coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ respecto de B, esto es, $x_B = (x_1, \ldots, x_n)$, $y_B = (y_1, \ldots, y_n)$, entonces:

1. $[x + y]_B = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.
2. $[ax]_B = (ax_1, \ldots, ax_n)$.
3. Dado un conjunto de vectores $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ de V, tendremos que S es l.i., l.d., sistema de generadores o base de V si y sólo si lo son sus vectores de coordenadas respecto de B en $\mathbb{K}^n$.

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita n y dadas dos bases distintas

$$B = \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ y } B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\},$$

queremos determinar la relación entre las coordenadas de un mismo vector x respecto de las dos bases. Consideremos las coordenadas de los vectores de B' en la base B:

$$\begin{array}{rcl} e'_1 & = & a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n \\ & \vdots & \\ e'_n & = & a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n \end{array}$$

Sea $x \in V$ con coordenadas $x_B = (x_1, \ldots, x_n)$ y $x_{B'} = (x'_1, \ldots, x'_n)$ respecto de las bases B y B', esto es,

$$x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = x = x'_1e'_1 + \cdots + x'_ne'_n.$$

Entonces

$$x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = x'_1(a_{11}e_1 + \cdots + a_{n1}e_n) + \cdots + x'_n(a_{1n}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n)$$

Reordenando términos, queda:

$$x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = (a_{11}x'_1 + \cdots + a_{1n}x'_n)e_1 + \cdots + (a_{n1}x'_1 + \cdots + a_{nn}x'_n)e_n.$$

De modo que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & a_{11}x'_1 + \cdots + a_{1n}x'_n \\ & \vdots & \\ x_n & = & a_{n1}x'_1 + \cdots + a_{nn}x'_n \end{array} \right.$$

Éstas son las *ecuaciones de cambio de base* de B' a B. Si P es la matriz

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces tenemos que $x_B = Px_{B'}$, esto es,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Decimos que ésta es la *ecuación matricial* del cambio de base. A la matriz P se la llama *matriz de cambio de base* de B' a B o *matriz de paso*, escribiéndose $P = M(B', B)$, y nos permite determinar las coordenadas de un vector x en la base B a partir de sus coordenadas en la base B'. Obsérvese que las columnas de P son las coordenadas de los vectores de B' respecto de B. Además, P es regular y, por tanto, $x_{B'} = P^{-1}x_B$, fórmula que nos da las coordenadas de un vector x en la base B' a partir de sus coordenadas en la base B. Escribimos $P^{-1} = M(B, B')$.