1. EJERCICIOS

1. Analizar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales.

   a) $A = \{(2x, x, -7x)/x \in \mathbb{R}\}$
   b) $A = \{(x, y, z)/xy = 1\}$
   c) $A = \{(x, y, z)/x = y \text{ ó } x = z\}$
   d) $A = \{(x, y, z)/x + y + z = 0 \text{ y } x - y - z = 0\}$

2. Analizar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_n[t]$ (conjunto de los polinomios con grado menor o igual a $n \geq 1$, con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{R}$).

   a) El conjunto A de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado n y el polinomio cero.
   b) $A = \{p(t) \in \mathbb{R}_n[t]/3p(0) + p(1) = 1\}$.
   c) $A = \{p(t) \in \mathbb{R}_n[t]/p'(0) + p''(0) = 0\}$

3. Analizar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   a) $A = \{M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})/det(M) = 0\}$.
   b) $A = \{M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})/det(M) \neq 0\}$
   c) $A = \{M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})/tr(M) = 0\}$.

4. Sea $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las funciones reales de variable real. Estudiar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   a) $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})/f \text{ es continua en el intervalo } (a, b)\}$.
   b) $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})/f(1) = f(2)\}$.
   c) $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})/f \text{ es creciente en el intervalo } (a, b)\}$.

5. Se considera el sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas sobre el cuerpo $\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\}$$

   Demostrar que el conjunto W de soluciones es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

6. El rango de una matriz A coincide siempre con el número máximo de vectores fila linealmente independientes y con el número máximo de vectores columna linealmente independientes. Estudiar, utilizando este hecho, si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes:

   a) $\{(2,-1,4),(4,-2,8)\}$.
   b) $\{(2,-1,4),(4,1,8),(1,0,3)\}$.
   c) $\{(2,-1,4,0),(0,-3,1,5),(4,1,7,-5)\}$.
   d) $\{(1,-1,1,0),(-1,0,1,1),(0,3,-1,1),(6,1,2,0)\}$.

7. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los vectores $u=(1,2,1), v=(1,3,2), x=(1,1,0), y=(3,8,5)$. Demostrar que $L(\{x,y\})=L(\{u,v\})$.

8. Determinar si las siguientes familias de vectores son sistemas de generadores de $\mathbb{R}^3$. En los casos afirmativos, obtener una base.

   a) $\{(1,1,0),(2,3,8)\}$
   b) $\{(1,1,1),(2,2,0),(3,0,0)\}$
   c) $\{(2,-1,3),(4,1,2),(8,-1,8)\}$.
   d) $\{(1,3,3),(1,3,4),(1,4,3),(6,2,1)\}$.

9. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[t]$ de los polinomios con grado menor o igual que n sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, se considera el conjunto de vectores

$$B=\{1,t,t^2,...,t^n\}$$

   Probar que B es una base de $\mathbb{R}_n[t]$.

10. En el espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de las matrices de orden 2×2 sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, se considera el conjunto de vectores

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

   Probar que B es una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

11. Determinar la dimensión y una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ engendrado por los vectores

$$\{(2,-1,4,0),(0,-3,1,5),(4,1,7,-5)\}$$

12. Sea

$$W = L(\{(1,2,-1,3,4),(2,4,-2,6,8),(1,3,2,2,6),(1,4,5,1,8),(2,7,3,3,9)\})$$

Hallar un subconjunto de los vectores que sea base de W.

13. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales

$$W_1 = L(\{(1,-1,0,1),(-1,0,1,0),(1,-2,1,2)\})$$

$$W_2 = L(\{(0,-1,1,1),(1,-2,1,2)\})$$

Hallar $dim(W_1 \cap W_2)$ y $dim(W_1 + W_2)$, así como las ecuaciones implícitas y paramétricas de W_1, W_2 y $W_1 + W_2$.

14. Determinar, en cada caso, si los vectores que se dan son una base de $\mathbb{R}^4$.

    a) $\{(2,1,0,-1),(1,2,1,0)\}$.
    b) $\{(0,1,2,-1),(1,0,1,-1),(0,0,2,1),(0,0,1,2)\}$.
    c) $\{(1,0,1,0),(0,1,-1,1),(2,1,1,0),(1,-1,2,-1)\}$.

    Si ahora llamamos V_1, V_2, V_3 a los subespacios vectoriales generados, respectivamente, por los vectores de a), b), c), determinar : $dim(V_i)$, $i = 1,2,3$; $dim(V_i \cap V_j)$, $i \neq j$ y ecuaciones de la intersección; $dim(V_i + V_j)$, $i \neq j$ y ecuaciones de $V_i + V_j$ ¿En qué casos $\mathbb{R}^4 = V_i \oplus V_j$?

15. Sean U, V, W, los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(a,b,c)/a+b+c=0\}, \quad V = \{(a,b,c)/a=c\}, \quad W = \{(0,0,c)/c \in \mathbb{R}\}$$

    Mostrar que:

    a) $\mathbb{R}^3 = U + V$.
    b) $\mathbb{R}^3 = U + W$.
    c) $\mathbb{R}^3 = V + W$.

    ¿En qué casos es directa la suma?

16. Sean los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$U = L(\{(1,1,0,-1),(1,2,3,0),(2,3,3,-1)\})$$

$$V = L(\{(1,2,2,-2),(2,3,2,-3),(1,3,4,-3)\})$$

    Hallar:

a) $dim(U+V)$ y ecuaciones de $U+V$.
b) $dim(U\cap V)$ y ecuaciones de $U\cap V$.

17. Sean los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$W_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/x-z=0,y+t=0\}$$

$$W_2=L(\{(0,0,0,1),(1,1,1,-1)\})$$

Calcular :

a) $dim(W_1)$ y $dim(W_2)$.
b) $dim(W_1\cap W_2)$ y ecuaciones de $W_1\cap W_2$. ¿Es $\mathbb{R}^4=W_1\oplus W_2$?
c) $dim(W_1+W_2)$.

18. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales

$$W_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/x-y=0,z+t=0\}$$

$$W_2=L(\{(1,1,-2,2),(1,0,-1,0)\}).$$

Calcular ecuaciones paramétricas, implícitas y bases de $W_1, W_2, W_1\cap W_2$ y W_1+W_2. ¿Es $\mathbb{R}^4=W_1\oplus W_2$?

19. Sean

$$W_1=L(\{(-1,0,0,1),(0,-1,-1,1),(0,1,-1,0)\}),$$

$$W_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/x+t=0\}.$$

a) Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas de W_2.
b) Dar bases de $W_1\cap W_2$ y de W_1+W_2.

20. En el espacio vectorial real $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_{2\times2}(\mathbb{R})/a+b+c+d=0\right\}$$

$$W_2=L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

Calcular una base, ecuaciones implícitas y paramétricas de W_1, W_2, W_1+W_2 y $W_1\cap W_2$.

21. Dada la base de $\mathbb{R}^3$, $B = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,2), v_3 = (1,2,3)\}$, hallar las coordenadas del vector $x = (6,9,14)$ en dicha base, determinando previamente la matriz de cambio de base $P = M(B_c, B)$ de la base canónica B_c en la base B.

22. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

    $$B_1 = \{(1,0,1),(-1,1,1),(1,-1,0)\} \text{ y } B_2 = \{(2,1,1),(1,1,1),(1,-1,1)\}$$

    a) Calcular la matriz de cambio de base de B_2 a B_1.

    b) Calcular las coordenadas en la base B_1 del vector cuyas coordenadas en B_2 son $(3,-2,2)$.