

Tema 1: Matrices. Sistemas de ecuaciones. Determinantes

José M. Salazar

Octubre de 2016

Tema 1: Matrices. Sistemas de ecuaciones. Determinantes

- Lección 1. Matrices. Sistemas de ecuaciones. Determinantes

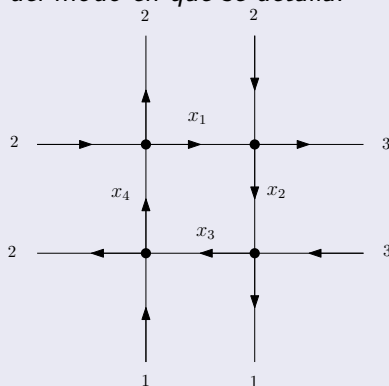
Índice

- 1 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales
 - Ejemplo
 - Definiciones y expresión matricial
- 2 Matrices y álgebra matricial
 - Definiciones preliminares
 - Operaciones con matrices
- 3 Resolución de sistemas lineales
 - Operaciones elementales y método de Gauss
 - Cálculo de matrices inversas con operaciones elementales
- 4 Determinantes
 - Definición y propiedades de los determinantes
 - Métodos de cálculo de determinantes
 - Matrices inversas
 - Regla de Cramer
 - Rango. Teorema de Rouché-Fröbenius

Ejemplo

Ejemplo (Redes)

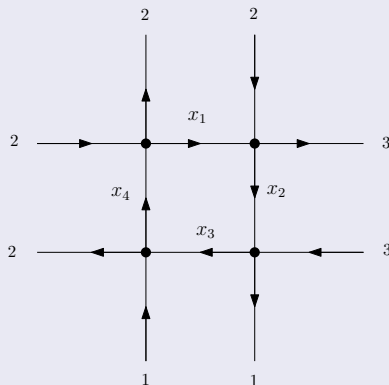
El tráfico de vehículos que entra y sale en la red de la figura cada minuto se reparte del modo en que se detalla:



Se desea conocer la calle con menor flujo de tráfico para realizar en ella unas obras. ¿Qué calle se debe elegir?

Ejemplo

Ejemplo



$$x_1 + 2 = x_2 + 3, \quad x_2 + 3 = x_3 + 1,$$

$$x_3 + 1 = x_4 + 2, \quad x_4 + 2 = x_1 + 2.$$

Resolviendo, $x_1 = \lambda$, $x_2 = -1 + \lambda$, $x_3 = 1 + \lambda$, $x_4 = \lambda$.

Dado que $\lambda \geq 1$ ($0 \leq x_2 = -1 + \lambda$), x_2 es menor que x_1 , x_3 y x_4 .

Ecuación lineal

Definición

Una expresión de la forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

con $a_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \dots, n$, y $b \in \mathbb{R}$ se llama **ecuación lineal** con n **incógnitas** o variables (las x_i). Los elementos a_i son los **coeficientes** de la ecuación y b es el **término independiente**.

Definición

Una **solución** de una ecuación lineal como la de arriba es una lista $(s_1, \dots, s_n)$, con $s_i \in \mathbb{R}$ para todo i , tal que al sustituir en los x_i de la ecuación, se satisface la igualdad.

Sistema de ecuaciones lineales

Definición

Una expresión de la forma

$$(I) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

donde los a_{ij} (coeficientes) y los b_i (términos independientes) son números reales se denomina **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** $x_1, \dots, x_n$. Una **solución** de (I) es una lista de n números reales $(s_1, \dots, s_n)$ tales que al sustituir por $(x_1, \dots, x_n)$, se cumplen las igualdades de (I).

Ecuación matricial

Definición

El sistema (I) se escribe matricialmente como $AX = \bar{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A las matrices A , X y $\bar{b}$ se las llama **matriz de coeficientes**, **matriz de incógnitas** y **matriz de términos independientes** de (I), respectivamente. A la matriz

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

se la llama **matriz ampliada de coeficientes** de (I).

Cuerpo

Definición (Cuerpo)

Un conjunto no vacío $\mathbb{K}$ acompañado de dos operaciones internas, $+$ y $\cdot$ (suma y multiplicación):

$$+, \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

tiene estructura de cuerpo si verifica las propiedades:

1. $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{K}$
2. $\exists 0 \in \mathbb{K} : \forall x \in \mathbb{K} \text{ se verifica } 0 + x = x = x + 0$. A 0 se le llama **cero del cuerpo**.
3. $\forall x \in \mathbb{K} \quad \exists y \in \mathbb{K} : x + y = y + x = 0$. El elemento y se llama **elemento opuesto** de x y se denota por $-x$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{K}$ se tiene $x + y = y + x$.

Cuerpo

Definición (Cuerpo)

5. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ se tiene $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
6. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ se tiene $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.
7. $\forall x, y \in \mathbb{K}$ se tiene $x \cdot y = y \cdot x$.
8. $\exists 1 \in \mathbb{K} : \forall x \in \mathbb{K}$ se tiene $1 \cdot x = x = x \cdot 1$. Al elemento 1 se le llama **uno del cuerpo**.
9. $\forall x \in \mathbb{K}, x \neq 0, \exists y \in \mathbb{K} : x \cdot y = y \cdot x = 1$. El elemento y es el **elemento inverso** de x denotándose por x^{-1} .

Ejemplos

Ejemplos habituales de cuerpos que se utilizan son $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.
Nosotros trabajaremos casi exclusivamente con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definición de matriz y tipos

Definición (Matriz)

Llamamos **matriz de orden $m \times n$** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ a una tabla con m filas y n columnas integrada por elementos de $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Escribiremos $A = (a_{i,j})$. Al conjunto de las matrices sobre $\mathbb{K}$ de orden $m \times n$ lo denotamos por $M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Una **submatriz** de A es una matriz obtenida de eliminar filas o columnas (o ambas) de A . La **diagonal principal** de A está constituida por los elementos a_{ii} .

Tipos de matrices

Definición (Tipos de matrices)

- *Matriz fila*: $m = 1$. *Matriz columna*: $n = 1$.
- *Matriz cuadrada*: $m = n$. Se denota $A \in M_n(\mathbb{K})$.
- *Matriz triangular superior*: A cuadrada y $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$.
Matriz triangular inferior: A cuadrada y $a_{ij} = 0 \ \forall i < j$.
- *Matriz diagonal*: $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$.
- *Matriz identidad*: $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonal con $a_{ii} = 1 \ \forall i$. Se denota por I_n .
- *Matriz nula*: $a_{ij} = 0 \ \forall i, j$. Se escribe $A = \bar{0}$.
- *Matriz traspuesta*: Si $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, la traspuesta de A es $A^t = (a_{ji}) \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$.
- *Matriz simétrica*: $A = A^t$.
- *Matriz antisimétrica*: $A = -A^t$.

Operaciones con matrices

Definición (Suma y producto por escalar)

Dadas $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, se define:

- *Suma de A y B*: $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$.
- *Producto por un escalar*: dado $\lambda \in \mathbb{K}$,
 $\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

Definición (Producto de matrices)

Dadas $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{ij}) \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$, se define el *producto de A por B* como $C = (c_{ij}) \in M_{m \times p}(\mathbb{K})$ donde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Escribimos $C = AB$.

Propiedades de la suma y el producto por un escalar

Propiedades (Suma y producto por escalar)

Dadas A, B, C matrices de tamaños adecuados para llevar a cabo las operaciones correspondientes y dados $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- $A + (B + C) = (A + B) + C.$
- $A + \bar{0} = \bar{0} + A$ con $\bar{0}$ la matriz nula.
- $A + (-A) = (-A) + A = \bar{0}.$
- $A + B = B + A.$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$
- $1A = A.$

Propiedades del producto

Propiedades (Producto)

Dadas A, B, C matrices de los tamaños adecuados:

- $A(BC) = (AB)C$.
- $AI_n = I_nA = A$ con $A \in M_n(\mathbb{K})$.
- $A(B + C) = AB + AC$.

Definición (Matriz inversa)

*La matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ es invertible si existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = BA = I_n$. La matriz B es **inversa** de A y se denota por A^{-1} .*

Propiedades de la inversa y la traspuesta

Propiedades (Propiedades de la inversa y la traspuesta)

- Si A es invertible, la inversa es única e invertible con $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ son invertibles, AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A es invertible, A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- $(A^t)^t = A$.
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- $(AB)^t = B^t A^t$.

Definición

$A \in M_n(\mathbb{K})$ es **ortogonal** si $AA^t = I_n$, esto es, si $A^t = A^{-1}$.

Matrices escalonadas

Definición

Una matriz es **escalonada** si:

1. Todas las filas nulas, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.
2. El número de ceros al comienzo de una fila no nula es estrictamente menor que el número de ceros al comienzo de la fila inferior.

El primer elemento no nulo de cada fila, en caso de tenerlo, se llama **cabecera** de la fila.

Matrices escalonadas

Definición

Si la matriz escalonada cumple, además:

- Todas las cabeceras de filas son unos.*
- En las columnas en las que están las cabeceras de las filas, todos los demás elementos son nulos,*

*entonces se dice que es **escalonada reducida**.*

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones elementales

Definición

*Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, llamamos **operaciones elementales** sobre las filas de A a las siguientes manipulaciones:*

- *Intercambiar la posición de dos filas.*
- *Sustituir la fila i -ésima por k veces ella más k' veces la j -ésima, con $k \neq 0$.*

Observación

Toda matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ se puede transformar en escalonada E o en una escalonada reducida R efectuando operaciones elementales sobre sus filas. La matriz E no es única, mientras R sí lo es.

Algoritmo para escalar matrices

Procedimiento (Obtención de matriz escalonada)

Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, reduzcámosla mediante operaciones elementales sobre las filas a forma escalonada y a forma escalonada reducida.

- 1. Si A^{j_1} es la primera columna de A con una entrada no nula, intercambiamos, si es necesario, filas para que $a_{1j_1} \neq 0$.*
- 2. Utilizamos a_{1j_1} como pivote para obtener ceros bajo él.*
- 3. Se repiten los pasos 1 y 2 con la submatriz obtenida de quitar la primera fila.*
- 4. Se repite el proceso hasta que la matriz queda en la forma escalonada E .*

Algoritmo para escalonar matrices

Procedimiento (Obtención de matriz escalonada reducida)

Si, además, buscamos obtener la matriz escalonada reducida, continuamos con los pasos siguientes:

- 5. Se multiplica la última fila no nula A_r (con cabecera a_{rj_r}) por $1/a_{rj_r}$ de forma que la cabecera se convierta en 1.*
- 6. Se utiliza $a_{rj_r} = 1$ como pivote para obtener ceros sobre él.*
- 7. Se repiten los pasos 5 y 6 para las filas $A_{r-1}, A_{r-2}, \dots, A_2$.*
- 8. Se multiplica A_1 por $1/a_{1j_1}$ (a_{1j_1} es la cabecera de la fila A_1). Así se obtiene la matriz escalonada reducida R .*

Típos de sistemas lineales

Definición

Decimos que $AX = \bar{b}$ es **compatible determinado** si tiene una única solución, **compatible indeterminado** si tiene más de una, e **incompatible** si no tiene ninguna.

Discutir un sistema $AX = \bar{b}$ consiste en determinar a cuál de los tipos mencionados pertenece.

Definición

Un sistema es **homogéneo** si $\bar{b} = \bar{0}$. Lo denotaremos por $AX = \bar{0}$. Si $\bar{b} \neq \bar{0}$, el sistema se dice **no homogéneo**.

Observación

Todo sistema homogéneo es compatible (siempre existe la solución trivial $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$).

Sistemas equivalentes

Definición

*Dos sistemas de ecuaciones lineales se dicen **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.*

Observación

Dado (I) $AX = \bar{b}$, si $\bar{A}'$ se obtiene de $\bar{A}$ mediante operaciones elementales sobre sus filas, $\bar{A} \rightarrow \bar{A}'$, entonces el sistema (II) asociado a $\bar{A}'$ es equivalente a (I).

Métodos de resolución de Gauss y Gauss-Jordan

Procedimiento (Métodos de resolución de Gauss y Gauss-Jordan)

Para resolver $(I) AX = \bar{b}$ se siguen los siguientes pasos:

- Se escalona $\bar{A} \rightarrow \bar{E}$ mediante operaciones elementales en filas.
- Se resuelve el sistema (II) asociado a $\bar{E}$, al que llamamos **sistema escalonado**, y que es equivalente a (I) . Se procede así:
 - Llamamos incógnitas principales a las asociadas a las cabeceras de $\bar{E}$ y parámetros al resto.
 - Se despejan las incógnitas principales en función de los parámetros empezando por la última ecuación y siguiendo el proceso de sustitución hacia arriba.

Éste es el **método de eliminación de Gauss**.

- Si escalonamos $\bar{A} \rightarrow \bar{R}$, con $\bar{R}$ escalonada reducida, y resolvemos el sistema asociado a $\bar{R}$, estamos utilizando el **método de eliminación de Gauss-Jordan**.

Cálculo de matrices inversas con operaciones elementales

Teorema

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ regular. La matriz inversa de A se obtiene de transformar en escalonada reducida la matriz $(A|I_n)$. Se obtendrá:

$$(A|I_n) \rightarrow (I_n|B)$$

siendo $B = A^{-1}$.

Definición de determinante

Definición (Determinante)

Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, el determinante de A es $\det(A) = a_{11}$. Supuesto conocido el valor $\det(A)$ para las matrices $A \in M_{n-1}(\mathbb{R})$, el determinante para

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se define del siguiente modo

$$\det(A) = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + \dots + a_{n1}\alpha_{n1}$$

*siendo $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, donde $A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ es la submatriz de A obtenida al quitar la fila i y la columna j . Al elemento α_{ij} se le llama **adjunto ij -ésimo** de A .*

Definición de determinante

Esta definición de determinante es de tipo inductivo y se denomina *desarrollo de Laplace* de $\det(A)$ por la primera columna.

Ejemplos

- $\det(I_n) = 1$.
- Si $A \in M_2(\mathbb{R})$, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.
- Si $A \in M_3(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\det(A) = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

Definición (Matriz regular)

Se dice que A es *regular* si $\det(A) \neq 0$.

Propiedades de los determinantes

Propiedades (Propiedades de los determinantes)

1. Dadas $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ iguales, salvo en la i -ésima fila (resp. columna) de A , que es igual a la suma de las i -ésimas filas (resp. columnas) de B y C , entonces:

$$\det(A) = \det(B) + \det(C)$$

2. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ tiene dos filas (resp. columnas) iguales o proporcionales, entonces $\det(A) = 0$.
3. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ y dada B obtenida de intercambiar en A la posición de dos filas (resp. columnas), entonces $\det(B) = -\det(A)$.
4. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ y dada B obtenida de multiplicar los elementos de una fila (resp. columna) de A por un escalar k , entonces $\det(B) = k \det(A)$. Si A tiene una fila (resp. columna) de ceros, entonces $\det(A) = 0$.

Propiedades de los determinantes

Propiedades (Propiedades de los determinantes)

5. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ y dada B obtenida de sumar a una fila (resp. columna) de A otra fila (resp. columna) multiplicada por un escalar k , entonces $\det(A) = \det(B)$.
6. $A \in M_n(\mathbb{R})$ es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.
7. Dadas $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
8. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(A) = \det(A^t)$
9. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(A)$ puede obtenerse desarrollando por cualquiera de sus filas o columnas:

$$\det(A) = a_{i1}\alpha_{i1} + \cdots + a_{in}\alpha_{in} = a_{1j}\alpha_{1j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj}$$

Métodos de cálculo de determinantes

Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ con $n > 3$, veamos procedimientos de cálculo de $\det(A)$.

Procedimiento

Se elige un elemento no nulo de una fila o columna (la que más ceros tenga) y se hacen ceros el resto de elementos mediante operaciones elementales (aplicando las reglas 3, 4 y 5 anteriores). Finalmente, se desarrolla por esa fila o columna obtenida. El procedimiento se puede repetir con los determinantes de las matrices de orden $n - 1$ resultantes.

Procedimiento

Se escalona A con operaciones elementales aplicando las propiedades 3, 4 y 5 anteriores. Resulta $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$

Cálculo de la matriz inversa

Teorema

Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ regular, se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)^t$$

siendo $\text{Adj}(A) = (\alpha_{ij})$ la matriz de adjuntos de A .

Regla de Cramer

Teorema (Regla de Cramer)

Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ regular y dado el sistema (I) $AX = \bar{b}$, entonces (I) es compatible determinado y sus soluciones son de la forma:

$$x_1 = \frac{\det(\bar{b} \ A^2 \ \dots \ A^n)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A^1 \ \dots \ A^{n-1} \ \bar{b})}{\det(A)},$$

siendo A^i la columna i -ésima de A para $i = 1, \dots, n$.

Rango

Definición (Rango)

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se llama **menor de orden r** de A al determinante de la matriz formada por la intersección de r filas y r columnas de A . El **rango** de A es r si existe un menor de orden r de A no nulo y todos los menores de orden mayor que r son nulos.

Observación

El rango de una matriz A es invariante por operaciones elementales sobre sus filas y resulta ser igual al número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada asociada a A .

Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema (Rouché-Frobenius)

Dado un sistema (I) $AX = \bar{b}$ de m ecuaciones con n incógnitas, se verifica:

- *El sistema es compatible si $r(A) = r(\bar{A})$. Será compatible determinado si $r(A) = r(\bar{A}) = n$ y compatible indeterminado si $r(A) = r(\bar{A}) < n$.*
- *El sistema es incompatible si $r(A) < r(\bar{A})$.*