1. ESPACIO EUCLÍDEO. ISOMETRÍAS

Muchos de los fenómenos que se investigan en la geometría utilizan nociones como las de longitud de un vector y ángulo entre vectores. Para introducir estos dos conceptos en los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales se define el producto escalar. Un $\mathbb{R}$-espacio vectorial al que se asigna un producto escalar se denomina *espacio vectorial euclídeo*. En este capítulo trabajaremos, principalmente, con $\mathbb{R}$-espacios vectoriales euclídeos de dimensión finita.

1.1. PRODUCTO ESCALAR. LONGITUDES Y ÁNGULOS

Definición 1. *(Producto escalar. Espacio vectorial euclídeo.)*

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Un producto escalar *asociado a V es una aplicación $\langle\,,\,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que verifica las propiedades siguientes:*

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ *para todo* $u, v \in V$.
2. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ *para todo* $u, v, w \in V$.
3. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ *para todo* $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\langle u, u\rangle > 0$ *para todo* $u \neq \bar{0}$.

Diremos entonces que el par $(V, \langle\,,\,\rangle)$ es un espacio vectorial euclídeo.

Si la aplicación $\langle\,,\,\rangle$ cumple las propiedades 1, 2 y 3 decimos que es una forma bilineal simétrica. Si, además, cumple la propiedad 4, se dice que es definida positiva y se habla de producto escalar asociado a V.

Propiedades.

a) $\langle v, \bar{0}\rangle = 0$ para todo $v \in V$.

b) $\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle$ para todo $u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

c) $\langle v, v\rangle = 0$ si y sólo si $v = \bar{0}$.

Definición 2. *Un ejemplo de espacio vectorial euclídeo, y que será el más utilizado por nosotros, es el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$, al que asociamos el* producto escalar usual *que se define del siguiente modo:*

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$,

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

1.2. EXPRESIÓN MATRICIAL DEL PRODUCTO ESCALAR

Dado un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, y dada una base de V, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, denotamos $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Llamamos *matriz de Gram* respecto de B a la matriz $A = (a_{ij})$.

Por la primera propiedad de los productos escalares, se deduce que A es una matriz simétrica ($a_{ij} = a_{ji}$ para todo par i, j)

Una vez conocida la matriz de Gram asociada a un producto escalar con respecto a una base B, es inmediato calcular el producto escalar de cualesquiera dos vectores $x, y \in V$ haciendo uso de dicha matriz. En efecto, si x e y tienen coordenadas con respecto a B

$$x_B = (x_1, \dots, x_n) \qquad y_B = (y_1, \dots, y_n),$$

entonces

$$\langle x, y \rangle = \langle x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n \rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = X^t A Y$$

siendo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

De este modo obtenemos la *expresión matricial del producto escalar con respecto a la base* B,

$$\langle x, y \rangle = X^t A Y.$$

Cabe preguntarse, si se elige otra base, B', cuál será la relación entre la nueva matriz de Gram asociada a esta base, A', y la matriz A asociada a la base B. Sean $x, y \in V$ con coordenadas

$$x_B = (x_1, \dots, x_n), \quad x_{B'} = (x'_1, \dots, x'_n)$$

$$y_B = (y_1, \dots, y_n), \quad y_{B'} = (y'_1, \dots, y'_n)$$

Denotamos $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ e $Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$. Asimismo, denotamos por P a la matriz de cambio de base de B' en B.

Resulta

$$\langle x, y \rangle = X^t A Y = X'^t A' Y'$$

Por otro lado,

$$\langle x, y\rangle = (PX')^t A(PY') = X'^t(P^tAP)Y'$$

De modo que la relación entre las dos matrices de Gram es de congruencia:

$$A' = P^tAP$$

Proposición 1. *Si A es una matriz $n \times n$ definida positiva (simétrica y con todos los autovalores reales y positivos), entonces*

$$\langle X, Y\rangle = X^tAY, \text{ con } X, Y \in \mathbb{R}^n$$

define un producto escalar en $\mathbb{R}^n$. De hecho, todos los productos escalares definidos en espacios vectoriales de dimensión finita tendrán una expresión matricial de este tipo.

Para determinar si una matriz A es definida positiva, existen varios criterios que no requieren del cálculo del signo de los autovalores. Enunciamos uno en la siguiente proposición.

Proposición 2. *(Criterio de Sylvester)*
Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica y sea $\Delta_i = Det(A_i)$, donde

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

Entonces A es definida positiva si y sólo si $\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Definición 3. *(Norma o módulo. Distancia)*
La longitud, norma o módulo *de un vector $v \in V$ se define como*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

Si $\|v\| = 1$, se dice que v es unitario.
La distancia *entre dos vectores $u, v \in V$ se define como*

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

Propiedades.

1. $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = \bar{0}$.
2. $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $v \in V$.
3. Para todo $u, v \in V$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Esta propiedad se conoce como *desigualdad triangular* o de Minkowski.
4. Dado $v \neq \bar{0}$, $\frac{v}{\|v\|}$ es un vector unitario.

5. Para todo $u, v \in V$, $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$. Esta propiedad se conoce como *desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

Definición 4. *(Ángulo entre dos vectores. Ortogonalidad)*

i) *Para todo par de vectores no nulos $u, v \in V$, el* ángulo *entre u y v se define como el único número $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$.*

ii) *Dados $u, v \in V$ no nulos, diremos que son* ortogonales *o* perpendiculares *si $\langle u, v\rangle = 0$. Obsérvese que u, v son ortogonales si y sólo si $\cos\theta = 0$, siendo θ el ángulo entre u y v, lo que es equivalente a decir que $\theta = \pi/2$.*

iii) *Una base B de vectores de V es* ortogonal *si sus vectores son ortogonales entre sí. Si los vectores de B son además unitarios, entonces se dice que la base es* ortonormal.

Propiedades.

1. Si $\{u_1, \ldots, u_k\}$ son vectores no nulos de V, ortogonales entre sí, entonces son linealmente independientes.
2. Si $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortogonal de V, entonces $B' = \{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \ldots, \frac{u_n}{\|u_n\|}\}$ es una base ortonormal de V.

Proposición 3. *Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortogonal del espacio vectorial euclídeo V. Entonces, dado $x \in V$,*

$$x = \frac{\langle x, e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1 + \cdots + \frac{\langle x, e_n\rangle}{\|e_n\|^2}e_n$$

esto es, $x_B = (x_1, \ldots, x_n)$ con $x_i = \frac{\langle x,e_i\rangle}{\|e_i\|^2}$. A las coordenadas x_i se les llama coeficientes de Fourier *de x con respecto a la base ortogonal B.*

1.3. MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT. PROYECCIONES

Teorema 1. *(Gram-Schmidt) Dada una base $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de un espacio vectorial euclídeo V, existe una base ortogonal $B' = \{e_1, \ldots, e_n\}$ tal que $L(u_1, \ldots, u_r) = L(e_1, \ldots, e_r)$ para todo $r = 1, \ldots, n$. Los vectores de la base B' serán:*

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 \\ e_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2,e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1 \\ &\vdots \\ e_n &= u_n - \frac{\langle u_n,e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1 - \cdots - \frac{\langle u_n,e_{n-1}\rangle}{\|e_{n-1}\|^2}e_{n-1} \end{aligned}$$

Corolario 1. *Si $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos de V, entonces existe una extensión a una base ortogonal.*

Definición 5. *(Subespacios ortogonales. Complemento ortogonal)*

i) *Un vector no nulo $v \in V$ se dice que es* ortogonal *a un subespacio vectorial W de V, denotado por $v \perp W$, si $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $w \in W$. Esto equivale a probar que v es ortogonal a los vectores de una base de W.*

ii) *Dos subespacios vectoriales W_1, W_2 de V se dicen* ortogonales*, algo que denotaremos por $W_1 \perp W_2$, si para todo $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ se tiene que $\langle w_1, w_2\rangle = 0$. Esto equivale a probar que los vectores de una base de W_1 son ortogonales a los vectores de una base de W_2.*

iii) *Si W es un subespacio vectorial de V de dimensión $k < n$, el conjunto*

$$W^{\perp} = \{v \in V : \langle v, w\rangle = 0 \text{ para todo } w \in W\}$$

es un subespacio vectorial de V de dimensión $n - k$ y se denomina complemento ortogonal *de W. De hecho, $V = W \oplus W^{\perp}$.*

Definición 6. *(Proyección ortogonal)*
Sea W un subespacio vectorial de V. Como $V = W \oplus W^{\perp}$, resulta que todo $v \in V$ se puede escribir de modo único como $v = w + u$ con $w \in W$ y $u \in W^{\perp}$. El vector w recibe el nombre de proyección ortogonal *de v sobre W y se denota por $w = P_W(v)$, mientras que u es la proyección ortogonal de v sobre $W^{\perp}$ y se escribe $u = P_{W^{\perp}}(v)$.*

El siguiente resultado proporciona un método rápido para calcular proyecciones ortogonales sobre un subespacio vectorial.

Proposición 4. *Sea W un subespacio vectorial de V y sea $v \in V$. Si $B_W = \{w_1, \dots, w_r\}$ es una base ortogonal de W, entonces, la proyección ortogonal de v sobre W es*

$$P_W(v) = \frac{\langle v, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \cdots + \frac{\langle v, w_r\rangle}{\|w_r\|^2} w_r$$

Definición 7. *(Matriz ortogonal) Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es* ortogonal *si A es invertible y $A^{-1} = A^t$, es decir, $AA^t = Id$.*

Propiedades. Toda matriz ortogonal $A \in M_n(\mathbb{R})$ cumple las propiedades siguientes:

i) Los vectores fila o columna de A forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual.

ii) $Det(A) = \pm 1$. Diremos que A es *ortogonal directa* si $Det(A) = 1$ y diremos que es *ortogonal inversa* si $Det(A) = -1$.

Proposición 5. *Dado el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$, la expresión matricial de la proyección ortogonal, P, sobre un subespacio W (a lo largo de $W^\perp$) es*

$$P = [\mathbf{W}|\mathbf{0}][\mathbf{W}|\mathbf{W}^\perp]^{-\mathbf{1}} = [\mathbf{W}|\mathbf{W}^\perp]\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[\mathbf{W}|\mathbf{W}^\perp]^{-\mathbf{1}}$$

siendo $[\mathbf{W}|\mathbf{W}^\perp]$ una matriz cuyas columnas son bases de W y $W^\perp$ respectivamente.

Si, además, elegimos las columnas de la matriz $[\mathbf{W}|\mathbf{W}^\perp]$ de modo tal que son bases ortonormales de W y $W^\perp$ respectivamente, dicha matriz es ortogonal y, por tanto, $[\mathbf{W}|\mathbf{W}^\perp]^{-\mathbf{1}} = [\mathbf{W}|\mathbf{W}^\perp]^{\mathbf{t}}$. En ese caso,

$$P = [\mathbf{W}|\mathbf{W}^\perp]\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[\mathbf{W}|\mathbf{W}^\perp]^{\mathbf{t}} \quad \text{ó} \quad \mathbf{P} = [\mathbf{W}|\mathbf{0}][\mathbf{W}|\mathbf{W}^\perp]^{\mathbf{t}}$$

Observación 1. *En $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar usual, la matriz P de la proyección ortogonal sobre la recta $W = L\{v\}$, siendo $v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, es:*

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ sen\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

1.4. ISOMETRÍAS

En esta sección nos interesamos por el estudio de aquellas aplicaciones lineales $f : V \to V'$ definidas entre espacios vectoriales euclídeos que conservan distancias y ángulos.

Definición 8. *(Isometría)*

Un homomorfismo $f : V \to V'$ es una isometría *o* aplicación ortogonal *si conserva el producto escalar, es decir, si*

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \textit{para todo } x, y \in V.$$

Propiedades.

1. Si f es una isometría, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle} = \|f(x)\|$, de modo que se preserva la norma de los vectores. El recíproco también será cierto, esto es, si $\|x\| = \|f(x)\|$ para todo $x \in V$, entonces f es una isometría.

2. Si f es una isometría, α es el ángulo entre x e y y β es el ángulo entre $f(x)$ y $f(y)$, entonces $\cos\alpha = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} = \frac{\langle f(x),f(y)\rangle}{\|f(x)\|\|f(y)\|} = \cos\beta$, de modo que también se conservan los ángulos entre vectores.

3. Si $\{u_1, \ldots, u_r\}$ son ortogonales (respectivamente ortonormales), entonces
   $\{f(u_1), \ldots, f(u_r)\}$ son también ortogonales (respectivamente ortonormales).
4. Si $f : V \to V'$ es una isometría con $dim(V) = dim(V') = n$, entonces f es un isomorfismo y f^{-1} es también una isometría.
5. Sea $f : V \to V'$ con $dim(V) = dim(V') = n$ y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V. Si $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ es una base ortonormal de V' entonces f es una isometría.

Caracterización matricial de una isometría. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo del espacio vectorial euclídeo V. Si B es una base ortonormal de V, entonces f es una isometría si y sólo si su matriz asociada $A = M(f, B)$ respecto de la base B es ortogonal, esto es, $A^t = A^{-1}$.

Definición 9. *(Transformaciones directas e inversas)*
Sea $f : V \to V$ una isometría. Si $Det(f) = 1$, esto es, el determinante de cualquiera de sus matrices asociadas es 1, entonces decimos que f es una transformación directa. *Si $Det(f) = -1$, entonces decimos que f es una* transformación inversa.

1.5. ISOMETRÍAS EN $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$

Aunque los próximos resultados son válidos para espacios euclídeos de dimensión 2 y 3 cualesquiera y se generalizan fácilmente a espacios de dimensión n, nosotros trabajaremos sólo con $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ dotados del producto escalar usual.

Teorema 2. *(Isometrías de $\mathbb{R}^2$)*
Consideremos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y una isometría $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Pueden darse dos situaciones:

i) Si $Det(f) = 1$, entonces para toda base ortonormal B

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

En este caso, la isometría f es una rotación, *también denominada* giro de ángulo α. *El valor de α no depende de la base ortonormal elegida, sino de f. Dos casos particulares son $\alpha = 0$ para el que $f = Id$ y $\alpha = \pi$ para el que $f = -Id$ (*simetría respecto del origen*).*

ii) Si Det(f) = −1, entonces para toda base ortonormal B

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

En este caso, el valor de α depende de la base elegida. De hecho, existe una base ortonormal $B' = \{v_1, v_2\}$ tal que

$$M(f,B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, la aplicación f del caso ii) es una simetría respecto de la recta determinada por el vector v_1. Aquí se tienen dos subespacios propios: $L(v_1)$ con autovalor 1 y $L(v_2)$ con autovalor -1.

Observación 2. *En $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar usual, la matriz S de la simetría sobre la recta $W = L\{v\}$, siendo $v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, es:*

$$S = 2P - I = \begin{pmatrix} 2\cos^2\theta - 1 & 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta & 2\operatorname{sen}^2\theta - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

siendo P la matriz de la proyección sobre la recta $L\{v\}$.

Observación 3. *Cualquier simetría cumple $S^2 = I$, dado que $S^2 = (2P - I)^2 = 4P^2 - 4P + I = I$.*

Teorema 3. *(Isometrías de $\mathbb{R}^3$)*

Consideremos $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y una isometría $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Pueden darse dos situaciones:

i) Si Det(f) = 1, entonces existe una base ortonormal $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

En este caso, f es una rotación de ángulo α alrededor de la recta $L(v_1)$ engendrada por el vector (autovector con autovalor asociado 1) v_1. El plano $L(v_2, v_3)$ es invariante por f, que actúa sobre él generando una rotación de ángulo α. Un caso particular es $\alpha = 0$ para el que $f = Id$.

ii) Si $Det(f) = -1$, entonces existe una base ortonormal $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

En este caso, f es la composición de la rotación del apartado anterior con una simetría ortogonal *respecto del plano $L(v_2, v_3)$. En esta situación, v_1 es un autovector con autovalor asociado -1. Un caso particular es $\alpha = 0$ para el que f representa una simetría ortogonal respecto de $L(v_2, v_3)$.*

1.6. ENDOMORFISMOS SIMÉTRICOS

Definición 10. *Dado un espacio vectorial euclídeo, V, se dice que un endomorfismo $f : V \to V$ es* simétrico *si verifica*

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle \quad \forall u, v \in V$$

Proposición 6. *Dado un endomorfismo $f : V \to V$, definido en un espacio euclídeo de dimensión finita, se tiene que f es simétrico si y sólo si su matriz asociada respecto a una base ortonormal es simétrica.*

Proposición 7. *Un endomorfismo simétrico tiene todos sus autovalores reales y siempre es diagonalizable. Más aun, siempre es posible encontrar una base ortonormal formada por vectores propios.*

Corolario 2. *Como consecuencia del resultado anterior, se tiene que toda matriz simétrica, $A \in M_n(\mathbb{R})$, es diagonalizable ortogonalmente, esto es, existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ y $D \in M_n(\mathbb{R})$ tales que*

$$P^{-1}AP = P^T AP = D,$$

siendo D la matriz diagonal de autovalores y P la matriz de paso ortogonal ($P^T = P^{-1}$) cuyas columnas son los vectores propios unitarios de la base ortonormal.

Teorema 4. *Todo endomorfismo $f : V \to V$, no singular, definido sobre un espacio euclídeo de dimensión finita, se puede escribir como la composición de un endomorfismo simétrico, s, y una transformación ortogonal, o.*

$$f = o \circ s$$

Escrito en forma matricial, podemos decir que toda matriz cuadrada no singular, F, se puede escribir como el producto de una matriz simétrica S y una matriz ortogonal O

$$F = OS$$