1. ESPACIO EUCLÍDEO. ISOMETRÍAS

1. En el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z + t = 0\}$$

y

$$W_2 = L\{(1, 1, -2, 2), (1, 0, -1, 0)\}$$

Hallar:

a) Las ecuaciones de $W_1^\perp$ y una base ortonormal de $W_1^\perp$.

b) Las ecuaciones del complemento ortogonal $W_2^\perp$ y una base ortogonal para W_2.

Resolvamos a). Buscamos las ecuaciones de $W_1^\perp$. En primer lugar, se determina una base de W_1 pasando a paramétricas:

$$W_1 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x &=& \lambda \\ y &=& \lambda \\ z &=& -\mu \\ t &=& \mu \end{array} \right.$$

Se tiene $B_{W_1} = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}$. Entonces,

$$W_1^\perp = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 : \bar{x} \perp (1, 1, 0, 0) \ \text{ y } \ \bar{x} \perp (0, 0, -1, 1)\}$$

$$W_1^\perp \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x + y &=& 0 \\ -z + t &=& 0 \end{array} \right.$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$W_1^\perp \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x &=& \lambda \\ y &=& -\lambda \\ z &=& \mu \\ t &=& \mu \end{array} \right.$$

y una base será $B_{W_1^\perp} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$. Obsérvese que esta base ya es ortogonal con respecto al producto escalar usual. Buscamos que sea ortonormal. Basta dividir cada vector entre su módulo. Así

$$B'_{W_1^\perp} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1) \right\}$$

es la base ortonormal de $W_1^\perp$ buscada.

Resolvamos b). Determinemos una base ortogonal para W_2. Los vectores $\{(1,1,-2,2),(1,0,-1,0)\}$ son base de W_2, pero no son ortogonales. Elegimos $e_1=(1,1,-2,2)$. Aplicamos Gram-Schmidt para obtener

$$\begin{aligned} e_2 &= (1,0,-1,0)-\tfrac{\langle(1,0,-1,0),(1,1,-2,2)\rangle}{\|(1,1,-2,2)\|^2}(1,1,-2,2)\\ &= \tfrac{1}{10}(7,-3,-4,-6)\end{aligned}$$

La base ortogonal pedida es $B_{W_2}=\{(1,1,-2,2),(-7,3,4,6)\}$

Las ecuaciones de $W_2^\perp$ son

$$W_2^\perp \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x+y-2z+2t &=& 0\\ x-z &=& 0 \end{array}\right.$$

2. Dada la forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{R}^3$, $F(x,y)=x^tAy$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

   a) Determinar para qué valores de "a" define F un producto escalar.
   b) Para $a=1$, ¿son ortogonales los vectores $(1,1,1)$ y $(2,-1,-1)$?

Resolvamos a). Aplicamos el criterio de Sylvester. Debe ocurrir

$$\Delta_1=a>0,\ \Delta_2=2a>0,\ \Delta_3=3a>0$$

Esto equivale a pedir $a>0$.

Resolvamos b). Se tiene

$$\langle(1,1,1),(2,-1,-1)\rangle=(1,1,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ -1\end{pmatrix}=0$$

de modo que los vectores dados sí son ortogonales con respecto al producto escalar definido por F para $a=1$.

3. Si F es la forma bilineal en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada con respecto de la base canónica es

$$A=\begin{pmatrix} a & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

determinar los valores de "a" para los que F define un producto escalar.

Por el criterio de Sylvester, debe ocurrir

$$\Delta_1 = a > 0,\ \Delta_2 = a - 1 > 0$$

De modo que se tiene producto escalar si, y sólo si, $a > 1$.

4. Sea $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida en la base canónica por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Determinar si Q da lugar a un producto escalar.

b) En el espacio euclídeo real $(\mathbb{R}^4, \langle\ ,\ \rangle)$ que define Q se pide:

  b.1) Calcular la distancia y ángulo entre los vectores $u = (1,1,1,1)$ y $v = (1,1,0,0)$.

  b.2) Obtener las ecuaciones implícitas del complemento ortogonal al subespacio vectorial $U = L\{(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$.

  b.3) Determinar una base ortonormal del subespacio vectorial $V = L\{(1,1,1,1),(1,0,0,1)\}$.

Resolvamos a). Aplicamos el criterio de Sylvester.

$$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = 4 > 0, \Delta_3 = 6 > 0,\ \Delta_4 = 9 > 0$$

Efectivamente, Q da lugar a un producto escalar.

Resolvamos $b.1$). La distancia entre los vectores

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ es}$$

$$d(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} = \sqrt{(0,0,1,1)A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 2$$

El ángulo entre los vectores se calcula a partir de la fórmula $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|\cos(\alpha)$. Tenemos

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \frac{u^tAv}{\sqrt{u^tAu}\sqrt{v^tAv}} = \frac{6}{\sqrt{12}\sqrt{4}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En consecuencia, $\alpha = arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$.
Resolvamos $b.2$). Dada una base de U, B_U, el subespacio $U^\perp$ es

$$U^\perp = \{\bar{x} : \bar{x} \perp B_U\} = \{\bar{x} : \bar{x} \perp (1,1,0,0),\, \bar{x} \perp (1,1,1,0)\}$$

Las ecuaciones son

$$U^\perp \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + 2y + z + t & = & 0 \\ 3x + 2y + 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolvamos $b.3$). Los vectores

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son base de V pero no son ortogonales, ya que $u_1^tAu_2 = 6 \neq 0$. Escogemos $e_1 = (1,1,1,1)$. Para obtener e_2 perpendicular a e_1, $e_2 \in V$, aplicamos Gram-Schmidt.

$$e_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} e_1 = (1,0,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,1,1) = (1/2, -1/2, -1/2, 1/2)$$

La base $B_V = \{(1,1,1,1), (1,-1,-1,1)\}$ es una base ortogonal de V con respecto al producto escalar determinado por Q. Para obtener una base ortonormal, cada vector debe dividirse entre su módulo. Así,

$$B'_V = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1,1), \frac{1}{2}(1,-1,-1,1) \right\}$$

es la base buscada.

5. Dado $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, calcular:

   a) La proyección del vector $(1,0,0)$ sobre el subespacio $U \equiv \{x + y = 0\}$.

b) La proyección del vector $(1,2,3)$ sobre el subespacio $W = L\{(1,0,1)\}$.

Resolvamos a). Escogemos una base ortogonal de U, $B_U = \{u_1 = (1,-1,0), u_2 = (0,0,1)\}$, y calculamos $P_U(x)$ para $x = (1,0,0)$.

$$P_U(x) = \frac{\langle x, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle x, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{1}{2}(1,-1,0) + 0(0,0,1) = (1/2,-1/2,0)$$

Resolvamos b). Sea $x = (1,2,3)$. Una base ortogonal de W es $B_W = \{w_1 = (1,0,1)\}$. Entonces,

$$P_W(x) = \frac{\langle x, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (2,0,2)$$

6. En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar usual, se considera el subespacio

$$U = L\{u_1 = (0,1,1,1), u_2 = (0,1,1,0), u_3 = (0,1,0,-1)\}$$

Se pide:

a) Hallar una base ortonormal de U.
b) Hallar las proyecciones sobre U y sobre $U^\perp$ del vector $v = (1,2,3,4)$.

Resolvamos a). Aplicamos Gram-Schmidt:

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (0,1,1,1) \\ e_2 & = & u_2 - \frac{\langle u_2, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} e_1 = \frac{1}{3}(0,1,1,-2) \\ e_3 & = & u_3 - \frac{\langle u_3, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \frac{\langle u_3, e_2\rangle}{\|e_2\|^2} e_2 = \frac{1}{2}(0,1,-1,0) \end{array}$$

Como base ortonormal elegimos

$$B_U = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,1,-2), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0) \right\}$$

7. En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar usual, utilizar el método de Gram-Schmidt para calcular una base ortonormal a partir de los vectores

$$\{u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (1,1,0,0), u_3 = (1,1,1,0), u_4 = (1,0,0,0)\}$$

Se tiene:

$$\begin{array}{lcl}
e_1 & = & (1,1,1,1) \\
e_2 & = & u_2 - \frac{\langle u_2,e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1) \\
e_3 & = & u_3 - \frac{\langle u_3,e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1 - \frac{\langle u_3,e_2\rangle}{\|e_2\|^2}e_2 = \frac{1}{2}(0,0,1,-1) \\
e_4 = & = & u_4 - \frac{\langle u_4,e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1 - \frac{\langle u_4,e_2\rangle}{\|e_2\|^2}e_2 - \frac{\langle u_4,e_3\rangle}{\|e_3\|^2}e_3 = \frac{1}{2}(1,-1,0,0)
\end{array}$$

8. En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar usual, obténgase la proyección ortogonal del vector $v = (1,0,3,2)$ sobre el subespacio

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tales que } x+y+z-t = 0, x-2y+z+t = 0\}$$

9. Obtener la matriz, expresada con respecto a la base canónica, de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre el subespacio

$$W = L\{(1,0,1,1),(1,1,1,0)\}$$

Calculemos una base de $W^\perp$. En primer lugar obtengamos Las ecuaciones cartesianas.

$$W^\perp = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z,t) \perp (1,0,1,1), (x,y,z,t) \perp (1,1,1,0)\}$$

$$W^\perp \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x+z+t & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x+z+t & = & 0 \\ y-t & = & 0 \end{array} \right.$$

En paramétricas:

$$W^\perp \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda - \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{array} \right.$$

Una base será

$$B_{W^\perp} = \{(-1,0,1,0),(-1,1,0,1)\}$$

La matriz, P, de la proyección será

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Encuentra la matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ que produce un giro (o rotación) de ángulo $\pi/2$ en el plano y después proyecta el resultado sobre el eje OX. Calcúlese también la matriz $B \in M_2(\mathbb{R})$ que realiza primero la proyección y luego el giro. ¿Coinciden ambas matrices?

    El giro pedido tiene por matriz $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. De igual modo, la proyección sobre el eje OX es $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Las matrices A y B pedidas son

    $$A = PG = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = GP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

    Resulta

    $$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix}$$

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ¿qué tipo de movimiento determina? Pruébese que A mantiene invariantes las distancias entre vectores, esto es, la distancia entre $\bar{x} = (x_1, x_2)$ y $\bar{x}' = (x_1', x_2')$ es la misma que la distancia entre $A\bar{x}$ y $A\bar{x}'$.

    El movimiento es, claramente, un giro de ángulo $\pi/2$ en el sentido contrario a las agujas del reloj. Por otro lado, se tiene

    $$d(\bar{x}, \bar{x}') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}$$

    y

    $$d(A\bar{x}, A\bar{x}') = d((-x_2, x_1), (-x_2', x_1')) = \sqrt{(-x_2 + x_2')^2 + (x_1 - x_1')^2}$$

    Es claro que ambas distancias coinciden.

12. Caracterícense las isometrías de $\mathbb{R}^2$ dadas por las matrices:

    $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    Estudiemos en primer lugar A. Se tiene $|A| = 1$. Se trata de un giro. Entonces

    $$\cos\alpha = 0 \quad \text{y} \quad -\operatorname{sen}\alpha = 1,$$

de modo que $\alpha = \arccos 0$ y $\alpha = -\operatorname{arc\,sen} 1$, esto es, $\alpha = -\pi/2$.

Estudiamos ahora el movimiento generado por B. Se tiene $|B| = -1$, de modo que es una simetría. El eje se obtiene a partir del subespacio propio asociado al autovalor 1. Los subespacios propios son:

$$V_1 = \{-x + y = 0\} \qquad V_{-1} = \{x + y = 0\}$$

$$V_1 = L\{(1,1)\} \qquad V_{-1} = L\{(1,-1)\}$$

El eje de simetría es la recta $L\{(1,1)\}$.

13. Encuéntrese, en $\mathbb{R}^2$, la matriz de la simetría ortogonal con respecto a la recta $2x - y = 0$.

    La matriz de la simetría es $S = 2P - I$, siendo P la proyección ortogonal sobre la recta $L\{(1,2)\}$. Calculemos P:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

    Por consiguiente:

$$S = 2P - I = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

    Otro modo de resolver este ejercicio es tener en cuenta que la matriz asociada a S respecto a la base ortonormal formada por los autovectores, $B = \{(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}), (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})\}$, es

$$M(S,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

    Entonces, si se escribe la expresión matricial con respecto a la base canónica:

$$S = M(B,B_c)M(S,B)M(B_c,B) = M(B,B_c)M(S.B)M(B,B_c)^{-1}$$

$$= M(B,B_c)M(S.B)M(B,B_c)^T$$

    De este modo, se obtiene el mismo resultado de arriba.

14. Encuéntrense las matrices $A \in M_3(\mathbb{R})$ que actúan en el espacio del siguiente modo:

i) Proyectando todos los vectores sobre el plano XY.

ii) Reflejando todos los vectores a través del plano XY.

iii) Rotando el plano XY un ángulo $\pi/2$ y llevando cada vector del eje Z a dos veces él mismo.

iv) Rotando primero el plano XY un ángulo $\pi/2$ y dejando fijo el eje Z, rotando después el plano XZ un ángulo $\pi/2$ y dejando fijo el eje Y, y rotando después el plano YZ un ángulo $\pi/2$ y llevando cada vector del eje X a tres veces él mismo.

¿Determina alguna de esas matrices una isometría?

Caso i). La matriz es $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Caso ii). La matriz es $S = 2P - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Caso iii). La matriz de la rotación es $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por otro lado, el giro se debe componer con la matriz $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, dando lugar a

$$A = HR = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Caso iv). La rotación alrededor del eje Z, la rotación alrededor del eje Y y la rotación alrededor del eje X son

$$R_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La aplicación que estira el ele X tres unidades es

$$H_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El endomorfismo pedido es

$$H_3 R_x R_y R_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que sólo en el caso $ii)$ tenemos una isometría.

15. Dada la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ determinada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide clasificarla y encontrar los subespacios propios

Dado que $|A| = -1$, se tiene una simetría o una simetría compuesta con una rotación. El polinomio característico es

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Los valores propios son $+1$ y -1. Por tanto, la transformación es una simetría. Calculemos el subespacio propio asociado al autovalor -1.

$$V_{-1} = \{\bar{x} : (A + I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

Resolviendo el sistema,

$$V_{-1} \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - x_3 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$V_{-1} = L\{(1, 0, 1)\}$$

El subespacio propio asociado al autovalor 1 es el plano perpendicular a V_1, esto es,

$$V_1 \equiv \{x_1 + x_3 = 0\}$$

$$V_1 = L\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$$

16. Dada la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ determinada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

Probar que es una rotación, encontrar el eje de rotación, el plano invariante ortogonal a dicho eje, así como el ángulo de rotación.

Es claro que $|A| = 1$ y que las columnas de A son unitarias y ortogonales, con lo que tenemos una rotación. Por tanto, $\lambda = 1$ es un autovalor real. El subespacio propio asociado, V_1, es el eje de rotación buscado.

$$V_1 \equiv \{\bar{x} : (A - I)\bar{x} = \bar{0}\} \qquad V_1 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} -x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$V_1 = L\{(-1, -1, 1)\}$$

El plano invariante ortogonal a V_1 es

$$V_1^{\perp} \equiv \{-x_1 - x_2 + x_3 = 0\} \qquad V_1^{\perp} = L\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$$

El ángulo se obtiene, por ejemplo, calculando la imagen de uno de los generadores de $V_1^{\perp}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dado que

$$(1, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 = \sqrt{2}\sqrt{2} \cos \alpha,$$

ocurre que $\alpha = \arccos(-1/2) = \frac{2\pi}{3}$. Obsérvese que los autovalores complejos del polinomio característico también suministran esta información.

17. Dado el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z),$$

probar que es una isometría y caracterizarla geométricamente.

La matriz asociada es

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para probar que es una isometría basta ver que $A^T A = I$. Se deja como tarea para el lector. Por otro lado, dado que $|A| = 1$, resulta un giro. Calculemos el eje de giro, que se corresponde con el subespacio propio V_1.

$$V_1 = \{\bar{x} : (A - I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

Dado que

$$A - I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

para obtener el subespacio propio, escalonamos la matriz $A - I$:

$$A - I \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema asociado, se tiene

$$V_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \lambda \end{array} \right.$$

El eje de rotación es $V_1 = L\{(1, 1, 1)\}$. El plano invariante, ortogonal al eje de rotación, es

$$V_1^{\perp} \equiv \{x + y + z = 0\} \qquad V_1^{\perp} = L\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$$

Elegimos un vector de este plano y calculamos su imagen:

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dado que $(-1, 0, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 = \sqrt{2}\sqrt{2}\cos\alpha$, se tiene que $\alpha = \arccos(-1) = \pi$.

18. Diagonalizar por semejanza ortogonal la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculemos los autovalores:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - 2)^2(5 - \lambda)$$

Los subespacios propios son

$$V_2 \equiv \{x + y + z = 0\} \qquad V_2 = L\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$$

y

$$V_5 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{array} \right. \qquad V_5 = L\{(1, 1, 1)\}$$

Debemos encontrar una base ortonormal de estos subespacios propios. Para ello, aplicamos Gram-Schmidt. Empecemos con V_2.

$$e_1 = (-1, 0, 1), \qquad e_2 = (-1, 1, 0) - \frac{1}{2}(-1, 0, 1) = (-1/2, 1, -1/2)$$

La base ortonormal es

$$B_{V_2} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)\}$$

Hagamos lo mismo con el subespacio propio V_5. La base ortonormal asociada es

$$B_{V_5} = \{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\}$$

La matriz de paso ortogonal resultante es

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Se tiene $P^{-1}AP = D$ con D la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$