1. EJERCICIOS

1. En el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z + t = 0\}$$

y

$$W_2 = L\{(1, 1, -2, 2), (1, 0, -1, 0)\}$$

Hallar:

a) Las ecuaciones de $W_1^{\perp}$ y una base ortonormal de $W_1^{\perp}$.

b) Las ecuaciones del complemento ortogonal $W_2^{\perp}$ y una base ortogonal para W_2.

2. Dada la forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{R}^3$, $F(x, y) = x^t Ay$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determinar para qué valores de "a" define F un producto escalar.

b) Para $a = 1$, ¿son ortogonales los vectores $(1, 1, 1)$ y $(2, -1, -1)$?

3. Si F es la forma bilineal en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada con respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

determinar los valores de "a" para los que F define un producto escalar.

4. Sea $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida en la base canónica por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Determinar si Q da lugar a un producto escalar.

b) En el espacio euclídeo real $(\mathbb{R}^4, \langle \, , \, \rangle)$ que define Q se pide:

b.1) Calcular la distancia y ángulo entre los vectores $u = (1,1,1,1)$ y $v = (1,1,0,0)$.

b.2) Obtener las ecuaciones implícitas del complemento ortogonal al subespacio vectorial $U = L\{(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$.

b.3) Determinar una base ortonormal del subespacio vectorial $V = L\{(1,1,1,1),(1,0,0,1)\}$.

5. Dado $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, calcular:

    a) La proyección del vector $(1,0,0)$ sobre el subespacio $U \equiv x + y = 0$.

    b) La proyección del vector $(1,2,3)$ sobre el subespacio $W = L\{(1,0,1)\}$.

6. En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar usual, se considera el subespacio

$$U = L\{(0,1,1,1),(0,1,1,0),(0,1,0,-1)\}$$

Se pide:

    a) Hallar una base ortonormal de U.

    b) Hallar las proyecciones sobre U y sobre $U^\perp$ del vector $v = (1,2,3,4)$.

7. En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar usual, utilizar el método de Gram-Schmidt para calcular una base ortonormal a partir de los vectores

$$\{(1,1,1,1),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,0,0,0)\}$$

8. En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar usual, obténgase la proyección ortogonal del vector $v = (1,0,3,2)$ sobre el subespacio

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tales que } x + y + z - t = 0, x - 2y + z + t = 0\}$$

9. Obtener la matriz, expresada con respecto a la base canónica, de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre el subespacio

$$W = L\{(1,0,1,1),(1,1,1,0)\}$$

10. Encuentra la matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ que produce un giro (o rotación) de ángulo $\pi/2$ en el plano y despué s proyecta el resultado sobre el eje OX. Calcúlese también la matriz $B \in M_2(\mathbb{R})$ que realiza primero la proyección y luego el giro. ¿Coinciden ambas matrices?

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ¿qué tipo de movimiento determina? Pruébese que A mantiene invariantes las distancias entre vectores, esto es, la distancia entre $\bar{x} = (x_1, x_2)$ y $\bar{x}' = (x_1', x_2')$ es la misma que la distancia entre $A\bar{x}$ y $A\bar{x}'$.

12. Caracterícense las isometrías de $\mathbb{R}^2$ dadas por las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Encuéntrese, en $\mathbb{R}^2$, la matriz de la simetría ortogonal con respecto a la recta $2x - y = 0$.

14. Encuéntrense las matrices $A \in M_3(\mathbb{R})$ que actúan en el espacio del siguiente modo:

    - Proyectando todos los vectores sobre el plano XY.
    - Reflejando todos los vectores a través del plano XY.
    - Rotando el plano XY un ángulo $\pi/2$ y llevando cada vector del eje Z a dos veces él mismo.
    - Rotando primero el plano XY un ángulo $\pi/2$ y dejando fijo el eje Z, rotando después el plano XZ un ángulo $\pi/2$ y dejando fijo el eje Y, y rotando después el plano YZ un ángulo $\pi/2$ y llevando cada vector del eje X a tres veces él mismo.

    ¿Determina alguna de esas matrices una isometría?

15. Dada la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ determinada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    se pide clasificarla y encontrar los subespacios propios

16. Dada la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ determinada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    se pide:

    Probar que es una rotación, encontrar el eje de rotación, el plano invariante ortogonal a dicho eje, así como el ángulo de rotación.

17. Dado el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z),$$

probar que es una isometría y caracterizarla geométricamente.

18. Diagonalizar por semejanza ortogonal la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$