1. DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS

1. Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

con coeficientes en $\mathbb{R}$. Hallar los valores propios, los vectores propios y una matriz P que permita la diagonalización de A. Calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = Det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 15\lambda + 14 = (\lambda - 1)(\lambda - 14)$$

Los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = 14$. Calculemos los subespacios propios asociados a los autovalores.

$$V_1 = \{\bar{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : A\bar{x} = 1 \cdot \bar{x}\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : (A - I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

La ecuación cartesiana de V_1 es

$$V_1 \equiv \{x + 3y = 0\}$$

Al pasar a paramétricas,

$$V_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -3\lambda \\ y = \lambda \end{array} \right.$$

por lo que una base del subespacio propio V_1 es $B_{V_1} = \{(-3, 1)\}$. El vector $(-3, 1)$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$. Esto significa que

$$A \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado,

$$V_{14} = \{\bar{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : A\bar{x} = 14 \cdot \bar{x}\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : (A - 14 \cdot I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

La ecuación cartesiana de V_{14} es

$$V_{14} \equiv \{4x - y = 0\}$$

Al pasar a paramétricas,

$$V_{14} \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 4\lambda \end{array} \right.$$

por lo que una base de V_{14} es $B_{V_{14}} = \{(1,4)\}$. El vector $(1,4)$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda = 14$. Esto significa que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 14 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Una base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores es $B = \{(-3,1),(1,4)\}$. La matriz asociada al endomorfismo determinado por $A = M(f, B_c)$ (B_c es la base canónica de $\mathbb{R}^2$), con respecto a la base B, es la matriz diagonal D de autovalores

$$D = M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso $P = M(B, B_c)$ es

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Se tiene la igualdad $P^{-1}AP = D$.

Calculemos A^n. Se tiene $A = PDP^{-1}$. En consecuencia,

$$A^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^nP^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/13 & 1/13 \\ 1/13 & 3/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12+14^n}{13} & \frac{-3+3\cdot 14^n}{13} \\ \frac{-4+4\cdot 14^n}{13} & \frac{1+12\cdot 14^n}{13} \end{pmatrix}$$

2. Determinar los valores de a, b, c, d para los cuales cada una de las siguientes matrices reales es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ con la condición } bc > 0 \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Estudiemos primero la matriz A. El polinomio característico es

$$p(\lambda) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 + (-a - d)\lambda + (ad - bc)$$

Los autovalores son

$$\lambda = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

Se tiene $(a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 + 4bc > 0$, de modo que A es diagonalizable siempre (supuesto $bc > 0$) ya que los autovalores son reales y distintos.

Veamos ahora la matriz B. El polinomio característico es

$$p(\lambda) = (a-\lambda)^2 + b^2$$

La única posibilidad de conseguir $p(\lambda) = 0$ es con $b = 0$ y $\lambda = a$. En ese caso, la propia matriz B es ya diagonal.

3. Indicar los valores de a, b y c para los cuales la matriz real A es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & b & c \end{pmatrix}$$

Debemos ver si todos los autovalores son reales y si las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden para todos ellos.

El polinomio característico es $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(c-\lambda)$, de modo que los autovalores son $\lambda = 1$ y $\lambda = c$. Deben distinguirse dos casos:

Caso 1. $c \neq 1$. Entonces $\lambda = 1$ es un autovalor de multiplicidad algebraica $m(1) = 2$ y $\lambda = c$ es un autovalor de multiplicidad algebraica $m(c) = 1$. Como $1 \leq dim(V_\lambda) \leq m(\lambda)$, resulta que $dim(V_c) = 1$, de modo que, para el autovalor real $\lambda = c$, las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden. Por otro lado,

$$dim(V_1) = 3 - r(A-I) = 3 - r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & b & c-1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad a = 0 \end{cases}$$

Debe darse la igualdad $dim(V_1) = m(1) = 2$, de manera que, supuesto $c \neq 1$, la matriz A es diagonalizable si y sólo si $a = 0$.

Caso 2. $c = 1$. Se tiene entonces que $\lambda = 1$ es el único autovalor, con $m(1) = 3$. Vemos cuál es la dimensión del subespacio propio asociado:

$$dim(V_1) = 3 - r(A-I) = 3 - r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix} < 3$$

Por consiguiente, en el caso 2, la matriz no es diagonalizable.

4. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de matriz asociada

$$F = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Determinar una base respecto de la cual F se represente en forma diagonal.

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2(1 - \lambda),$$

de modo que los autovalores son $\lambda = 1$, con $m(1) = 1$ y $\lambda = 2$ con $m(2) = 2$. Calculemos una base de autovectores de V_1.

$$V_1 = \{\bar{x} : F\bar{x} = \bar{x}\} = \{\bar{x} : (F - I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

Escalonemos la matriz asociada al sistema homogéneo $(F - I)\bar{x} = \bar{0}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Resulta

$$V_1 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} -x + 3y + 2z & = & 0 \\ 3y + z & = & 0 \end{array} \right.$$

Pasando a paramétricas queda

$$V_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3\lambda \end{array} \right.$$

de modo que una base de V_1 es $B_{V_1} = \{(3, -1, 3)\}$. Esto quiere decir que $F \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. De hecho, al aplicar F a cualquier vector de V_1, obtenemos el mismo vector.

Calculemos ahora una base del otro subespacio propio V_2.

$$V_2 = \{\bar{x} : F\bar{x} = 2\bar{x}\} = \{\bar{x} : (F - 2I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

La matriz de coeficientes del sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

No es necesario escalonarla. La ecuación cartesiana de V_2 es $\{-x+2y+2z = 0\}$. Al pasar a paramétricas queda

$$V_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} \right.$$

Una base de V_2 es $B_{V_2} = \{(2,1,0),(2,0,1)\}$. Tenemos una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores

$$B = \{B_{V_1}, B_{V_2}\} = \{(3,-1,3),(2,1,0),(2,0,1)\}$$

Ésta es la base pedida. La matriz asociada a la aplicación lineal f (determinada por la matriz F) con respecto a la base B es una matriz diagonal

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Demostrar que un endomorfismo f es inyectivo si y sólo si ningún valor propio de f es nulo.

$$f \text{ es inyectivo } \Leftrightarrow Ker(f) = \bar{0} \Leftrightarrow f(\bar{x}) = \bar{0} \text{ implica que } \bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\bar{x}) = 0\bar{x} \text{ implica que } \bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow 0 \text{ no es autovalor de } f$$

6. Sea E_4 un espacio vectorial real. $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ una base de E_4. Sea $f \in End(E_4)$, cuya matriz respecto a B es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Determinar los valores de a para los que f es diagonalizable.

   b) Si $a = 1$:

      1) Diagonalizar A.

      2) Si V_2 es el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 2$, hallar las ecuaciones paramétricas de $V_2 \cap W$ y $V_2 + W$, siendo W el subespacio de E_4 de ecuaciones implícitas $W = \{(x,y,z,t)/x+z = x = y-3t = 0\}$.

      3) ¿Es f suprayectivo?, ¿es f inyectivo?.

Resolvamos el apartado a). El polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - a)(\lambda - 2)$. Existen 3 casos posibles: $a = 1$, $a = 2$ y $a \neq \{1,2\}$.

Caso 1. Sea $a = 1$. Entonces $\lambda = 1$ es un autovalor con $m(1) = 3$ y $\lambda = 2$ es otro autovalor con $m(2) = 1$. Es claro que $dim(V_2) = 1 = m(2)$, mientras que

$$dim(V_1) = 4 - r(A - I) = 4 - 1 = 3,$$

de modo que f es diagonalizable.

Caso 2. Sea $a = 2$. Entonces $\lambda = 1$ es autovalor con $m(1) = 2$ y $\lambda = 2$ es autovalor con $m(2) = 2$. Veamos las dimensiones de los subespacios propios asociados.

$$dim(V_1) = 4-r(A-I) = 4-2 = 2 \quad dim(V_2) = 4-r(A-2I) = 4-2 = 2,$$

de modo que los dos autovalores son reales y las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden para los dos. El endomorfismo del caso 2 es, por tanto, diagonalizable.

Caso 3. Sea $a \neq \{1,2\}$. Entonces los autovalores son $\lambda = 1$ con $m(1) = 2$, $\lambda = 2$ con $m(2) = 1 = dim(V_2)$ y $\lambda = a$ con $m(a) = 1 = dim(V_a)$. Además, $dim(V_1) = 4 - r(A-I) = 4-2 = 2 = m(1)$, de manera que f es diagonalizable también para el caso 3.

Resolvamos el apartado b.1). El polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)$. Los subespacios propios tienen ecuaciones cartesianas:

$$V_1 \equiv \{x+t=0\} \qquad V_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Pasando a paramétricas queda

$$V_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda_3 \\ y = \lambda_1 \\ z = \lambda_2 \\ t = \lambda_3 \end{array} \right. \qquad V_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = \lambda \end{array} \right.$$

Las bases respectivas para los subespacios propios son:

$B_{V_1} = \{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(-1,0,0,1)\},$ con coordenadas respecto de B, de modo que $B_{V_1} = \{\vec{e}_2, \vec{e}_3, -\vec{e}_1 + \vec{e}_4\}$.

$B_{V_2} = \{(0,0,0,1)\},$ con coordenadas respecto de B, de modo que $B_{V_2} = \{\vec{e}_4\}$.

Una base de autovectores de E_4 es $B_{E_4} = \{\vec{e}_2, \vec{e}_3, -\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_4\}$. La matriz diagonal de autovalores D y la matriz de paso P son

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado b.2). Las ecuaciones de W son

$$W \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x+z & = & 0 \\ x & = & 0 \\ y-3t & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{lcl} x+z & = & 0 \\ -z & = & 0 \\ y-3t & = & 0 \end{array} \right.$$

y $dim(W) = 4 - r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1.$

Las ecuaciones cartesianas de $V_2 \cap W$ son

$$V_2 \cap W \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y - 3t & = & 0 \\ z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \\ t & = & 0 \end{array} \right.$$

Por la fórmula de las dimensiones, $dim(V_2 + W) = dim(V_2) + dim(W) - dim(V_2 \cap W) = 1 + 1 - 0 = 2$. Como $V_2 + W = L(B_{V_2}, B_W)$, necesitamos calcular una base de W. Tras pasar a paramétricas, se obtiene la base $B_W = \{(0,3,0,1)\}$, con coordenadas respecto de B. De modo que una base para $V_2 + W$ es $B_{V_2+W} = \{(0,0,0,1),(0,3,0,1)\}$, con coordenadas respecto de B, esto es,

$$B_{W+V_2} = \{\vec{e}_4, 3\vec{e}_2 + \vec{e}_4\}$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$V_2 + W \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 3\lambda_2 \\ z & = & 0 \\ t & = & \lambda_1 + \lambda_2 \end{array} \right.$$

Resolvamos el apartado b.3). El endomorfismo f tiene matriz asociada A con $a = 1$, de modo que $dim(Im(f)) = r(A) = 4 = dim(E_4)$. Por consiguiente, $Im(f) = E_4$ y f es suprayectivo. Por otro lado, $dim(Ker(f)) = dim(E_4) - dim(Im(f)) = 4 - 4 = 0$, con lo que $Ker(f) = \{\bar{0}\}$, siendo f un monomorfismo (homomorfismo inyectivo).

7. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Determinar los valores propios de A y estudiar su diagonalización.

   b) Determinar una matriz P que permita la diagonalización.

   c) Diagonalizar A^2 y A^{-1}.

   d) Calcular A^n.

Calculemos el polinomio característico:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda & 2-\lambda & -\lambda(-2+\lambda) \\ 0 & 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & -\lambda(-2+\lambda) \\ 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)^2(-2+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^3(-\lambda-2)$$

Los autovalores son $\lambda = 2$ con $m(2) = 3$ y $\lambda = -2$ con $m(-2) = 1$.

Por otro lado, $dim(V_{-2}) = m(-2) = 1$, mientras que $dim(V_2) = 4 - r(A-2I) = 4-1 = 3$, de modo que A es diagonalizable.

Estudiamos a continuación el apartado b). Para determinar la matriz de paso necesitamos una base de autovectores de $\mathbb{R}^4$, que obtenemos a partir de los subespacios propios V_2 y V_{-2}.

$$V_2 = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 : (A-2I)\bar{x} = \bar{0}\}, \qquad V_2 \equiv \{-x+y+z+t=0\}$$

Tras pasar a paramétricas, se tiene la base

$$B_{V_2} = \{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\}.$$

Por otro lado,

$$V_{-2} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 : (A+2I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

Al escalonar la matriz asociada al sistema homogéneo $(A+2I)\bar{x} = \bar{0}$ queda

$$A+2I \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$V_{-2} \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x-y-z+3t & = & 0 \\ y+z-2t & = & 0 \\ -z+t & = & 0 \end{array} \right.$$

Tras pasar a paramétricas se obtiene la base $B_{V_{-2}} = \{(-1,1,1,1)\}$. Así, tenemos una base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovectores

$$B = \{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(-1,1,1,1)\}$$

La matriz de paso P y la matriz diagonal de autovalores D serán

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = M(f,B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Apartado c). Obsérvese que

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

de modo que $D^2 = P^{-1}A^2P$. Esto quiere decir que la matriz diagonal de autovalores asociada a A^2 es

$$D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso es P. Obsérvese, además, que $A^2 = PD^2P^{-1} = 2^2I$.

Por otro lado, $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ y, por tanto, $D^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$, con lo que la matriz diagonal de autovalores asociada a A^{-1} es

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso es P.

Resolvamos el apartado d). Si n es par, $n = 2m$, entonces

$$A^n = (A^2)^m = (2^2I)^m = 2^nI.$$

Si n es impar, $n = 2m+1$, entonces

$$A^n = A^{2m}A = 2^{2m}IA = 2^{n-1}A.$$

8. Estudiar la posible diagonalización de las siguientes aplicaciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

   a) $f(x,y,z) = (-x-3z, 3x+2y+3z, -3x-z)$
   b) $f(x,y,z) = (x+y+z, 2y+z, 2y+3z)$
   c) $f(x,y,z) = (x+y, y+z, -2y-z)$

Estudiemos el caso a). La matriz asociada al endomorfismo f es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda - 16 = (-4-\lambda)(\lambda-2)^2$, de modo que los autovalores son $\lambda = -4$, $m(-4) = 1$ y $\lambda = 2$, $m(2) = 2$. Las dimensiones de los subespacios propios correspondientes son

$$dim(V_{-4}) = m(-4) = 1 \text{ y } dim(V_2) = 3 - r(A - 2I) = 2 = m(2)$$

de manera que f es diagonalizable.

Veamos el caso b). La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

con polinomio característico $p(\lambda) = (\lambda-1)^2(4-\lambda)$. Los autovalores son $\lambda = 1$, $m(1) = 2$ y $\lambda = 4$, $m(4) = 1$. Las dimensiones de los subespacios propios son $dim(V_4) = m(4) = 1$ y $dim(V_1) = 3 - r(A-I) = 2 = m(1)$. Por consiguiente, el endomorfismo es diagonalizable.

Estudiemos el caso c). La matriz asociada al endomorfismo f es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

con polinomio característico $p(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 1)$. Se tiene que los autovalores son $\lambda = 1$ y $\lambda = \pm i$, de manera que el endomorfismo no es diagonalizable.

9. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por $f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = dx^3 + cx^2 + bx + a$. Estudiar su diagonalización encontrando la matriz P que la permita.

   Consideremos la base canónica $B_c = \{1, x, x^2, x^3\}$ y calculemos la matriz asociada al endomorfismo con respecto a esta base.

   Dado que $f(1) = x^3, f(x) = x^2, f(x^2) = x, f(x^3) = 1$, entonces

$$A = M(f, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-\lambda^2)(\lambda^2-1) = (\lambda^2-1)^2 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

Los autovalores son $\lambda = 1$, $m(1) = 2$ y $\lambda = -1$, $m(-1) = 2$. Determinemos los subespacios propios. Al escribir V_1 con coordenadas respecto de B_c se tiene

$$V_1 = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 : (A - I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

Las ecuaciones implícitas son

$$V_1 \equiv \begin{cases} -x + t & = & 0 \\ -y + z & = & 0 \end{cases}$$

Tras pasar a paramétricas, se consigue una base de V_1,

$$B_{V_1} = \{(1,0,0,1),(0,1,1,0)\} \text{ con coordenadas respecto de } B_c.$$

Esto quiere decir que $B_{V_1} = \{1 + x^3, x + x^2\}$.

Por otro lado, al escribir V_{-1} con coordenadas respecto de B_c,

$$V_{-1} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 : (A + I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

Las ecuaciones implícitas son

$$V_{-1} \equiv \begin{cases} x + t & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{cases}$$

Tras pasar a paramétricas se tiene una base de V_{-1},

$$B_{V_{-1}} = \{(-1,0,0,1),(0,-1,1,0)\} \text{ con coordenadas respecto de } B_c.$$

Esto significa que $B_{V_{-1}} = \{-1 + x^3, -x + x^2\}$.

Por consiguiente, una base de autovectores de $\mathbb{R}_3[x]$ es

$$B = \{-1 + x^3, -x + x^2, 1 + x^3, x + x^2\}$$

que, escrito con coordenadas respecto de B, da lugar a

$$B = \{(-1,0,0,1),(0,-1,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0)\}$$

La matriz de paso P y la matriz diagonal de autovalores $D = M(f,B)$ son

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinar:

a) Autovalores y autovectores de f.

b) Hallar una base que permita la diagonalización.

Resolvamos el apartado a). El polinomio característico es $p(\lambda) = (4-\lambda)(\lambda+2)^2$. Los autovalores son $\lambda = 4$ con $m(4) = 1$ y $\lambda = -2$ con $m(-2) = 2$. Determinemos los subespacios propios asociados.

$$V_4 \equiv \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 : (A-4I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

Al escalonar la matriz de coeficientes del sistema $(A-4I)\bar{x} = \bar{0}$ resulta

$$A - 4I \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

De manera que las ecuaciones cartesianas son

$$V_4 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} -x-y+z & = & 0 \\ -2y+z & = & 0 \end{array} \right.$$

Tras pasar a paramétricas, se obtiene la base $B_{V_4} = \{(1,1,2)\}$.

Por otro lado,

$$V_{-2} \equiv \{x-y+z=0\}$$

Una base de V_{-2} es $B_{V_{-2}} = \{(1,1,0),(-1,0,1)\}$. Por consiguiente, la base de autovectores de $\mathbb{R}^3$ pedida será $B = \{(1,1,0),(-1,0,1),(1,1,2)\}$ y la matriz diagonal asociada a f con respecto a esta base, $D = M(f,B)$, será

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

11. Hallar a, b, c, d, e y f sabiendo que los vectores: $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (1,0,-1)$, $\vec{w} = (-1,-1,0)$ son autovectores de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Se tiene $A\vec{u} = \lambda_1\vec{u}$, $A\vec{v} = \lambda_2\vec{v}$, $A\vec{w} = \lambda_3\vec{w}$. Escrito en forma de sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3 & = & \lambda_1 \\ a+b+c & = & \lambda_1 \\ d+e+f & = & \lambda_1 \\ 0 & = & \lambda_2 \\ a-c & = & 0 \\ d-f & = & -\lambda_2 \\ -2 & = & -\lambda_3 \\ -a-b & = & -\lambda_3 \\ -d-e & = & 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & 3 \\ d+e+f & = & 3 \\ a-c & = & 0 \\ d-f & = & 0 \\ -a-b & = & -2 \\ -d-e & = & 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \\ d=-3 \\ e=9 \\ f=-3 \end{array}\right.$$

12. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ el endomorfismo definido por $f(p(x)) = p'(x)$. Hallar los autovalores y autovectores de f ($p'(x)$ es el polinomio derivado de $p(x)$).

Teniendo en cuenta que $f(1) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x^2) = 2x$ y $f(x^3) = 3x^2$, la matriz asociada a f con respecto a la base canónica $B_c = \{1, x, x^2, x^3\}$ es

$$A = M(f, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^4$, de modo que $\lambda = 0$ es el único autovalor, con $m(0) = 4$. El subespacio propio V_0 es, en paramétricas,

$$V_0 \equiv \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{array}\right.$$

De modo que $V_0 = L((1,0,0,0))$ con coordenadas respecto de B_c, esto es, $V_0 = L(1) = \{\text{polinomios constantes}\}$. Este endomorfismo no es diagonalizable ya que las multiplicidades algebraica y geométrica no coinciden.

13. Determinar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ sabiendo:

    a) $Im(f) = L\{(0,1,-1),(2,1,1)\}$.

    b) $\lambda = 0$ es un valor propio de f.

    c) El subespacio propio asociado a $\lambda = 0$ está generado por $(0,1,1)$.

    Hallar, si es posible, una base de $\mathbb{R}^3$ en la que f venga dado por una matriz diagonal.

    Al ser 0 autovalor con autovector $(0,1,1)$, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a f, se tiene $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

esto es,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{12} + a_{13} & = & 0 \\ a_{22} + a_{23} & = & 0 \\ a_{32} + a_{33} & = & 0 \end{array} \right.$$

La matriz A puede ser

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ya que cumple las ecuaciones de arriba y, además, sus columnas son los generadores de $Im(f)$. El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda(\lambda + 2)(\lambda - 2)$.

Sabemos que $V_0 = L((0,1,1))$, de manera que sólo queda obtener bases de V_2 y V_{-2}. Escalonando los sistemas de ecuaciones resultantes, se obtiene

$$V_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \qquad V_{-2} \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Las bases respectivas son $B_{V_2} = \{(1,1,0)\}$, $B_{V_{-2}} = \{(1,0,1)\}$. La base pedida de autovectores de $\mathbb{R}^3$ es

$$B = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,0,1)\}$$

siendo la matriz asociada a f respecto de esta base

$$D = M(f,B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

14. Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$:

$$V = L\{(1,-1)\} \qquad W \equiv \{x+2y=0\},$$

determínese la proyección, P, sobre V a lo largo de W. ¿Cuál es la proyección de $v=(1,2)$ sobre V a lo largo de W?

Una base de V es $B_V = \{(1,-1)$ y una base de W es $B_W = \{(-2,1)\}$. La expresión matricial de P respecto a la base canónica, $M(P,B_c)$ (a la que denotamos también por P para abreviar), será:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La proyección de $v=(1,2)$ sobre V a lo largo de W es

$$P\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

15. Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$V = L\{(1,-1,-1),(0,1,-2)\} \qquad W = L\{(1,-1,0)\},$$

pruébese que son complementarios y determínese la proyección, P, sobre V a lo largo de W. ¿Cuál es la proyección de $v=(-2,1,3)$ sobre V a lo largo de W?

Son complementarios dado que

$$r\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Determinemos la matriz de P respecto a la base canónica:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La proyección de v sobre V a lo largo de W es

$$P\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

16. Dados los subespacios complementarios de $\mathbb{R}^3$:

$$V = L\{(1,1,1),(1,2,2)\}, \qquad W = L\{(1,2,3)\},$$

se pide:

i) Hallar la proyección, P, sobre V a lo largo de W y la proyección, Q, sobre W a lo largo de V.

ii) ¿Cuál es la proyección de $v = (2,-1,1)$ sobre W a lo largo de V?

iii) Comprobar que P y Q son dos proyecciones.

iv) Probar que $V = Im(P) = Ker(Q)$ y que $W = Ker(P) = Im(Q)$.

Resolvamos i). La matriz de P será:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz de Q será:

$$Q = I - P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolvamos ii). La proyección de v sobre W a lo largo de V es

$$Q \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Para resolver iii) basta comprobar que $P^2 = P$ y que $Q^2 = Q$. Dejamos esta tarea al lector como ejercicio.

Demostremos iv). Es fácil ver que

$$V = L\{(1,1,1),(1,2,2)\} = Im(P)$$

Además,

$$Ker(I-P) \equiv \{-y+z=0\} = L\{(1,0,0),(0,1,1)\} = V$$

de modo que $V = Im(P) = Ker(Q)$.

Por otro lado, es claro que $Im(Q) = W$ y

$$P\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Como $dim(Ker(P)) = 3 - dim(Im(P)) = 1$, una base para $Ker(P)$ es $B_{Ker(P)} = \{(1,2,3)\}$, de modo que $W = Im(Q) = Ker(P)$.