1. EJERCICIOS

1. Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

   con coeficientes en $\mathbb{R}$. Hallar los valores propios, los vectores propios y una matriz P que permita la diagonalización de A. Calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Determinar los valores de a, b, c, d para los cuales cada una de las siguientes matrices reales es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ con la condición } bc > 0 \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

3. Indicar los valores de a, b y c para los cuales la matriz real A es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & b & c \end{pmatrix}$$

4. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de matriz asociada

$$F = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

   Determinar una base respecto de la cual F se represente en forma diagonal.

5. Demostrar que un endomorfismo f es inyectivo si y sólo si ningún valor propio de f es nulo.

6. Sea E_4 un espacio vectorial real. $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ una base de E_4. Sea $f \in End(E_4)$, cuya matriz respecto a B es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determinar los valores de a para los que f es diagonalizable.

b) Si $a = 1$:

1) Diagonalizar A.

2) Si V_2 es el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 2$, hallar las ecuaciones paramétricas de $V_2 \cap W$ y $V_2 + W$, siendo W el subespacio de E_4 de ecuaciones implícitas $W = \{(x, y, z, t)/x + z = x = y - 3t = 0\}$.

3) ¿Es f suprayectivo?, ¿es f inyectivo?.

7. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinar los valores propios de A y estudiar su diagonalización.

b) Determinar una matriz P que permita la diagonalización.

c) Diagonalizar A^2 y A^{-1}.

d) Calcular A^n.

8. Estudiar la posible diagonalización de las siguientes aplicaciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

a) $f(x, y, z) = (-x - 3z, 3x + 2y + 3z, -3x - z)$

b) $f(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$

c) $f(x, y, z) = (x + y, y + z, -2y - z)$

9. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por $f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = dx^3 + cx^2 + bx + a$. Estudiar su diagonalización encontrando la matriz P que la permita.

10. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinar:

a) Autovalores y autovectores de f.

b) Hallar una base que permita la diagonalización.

11. Hallar a, b, c, d, e y f, sabiendo que los vectores: $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$, $\vec{w} = (-1, -1, 0)$ son autovectores de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

12. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ el endomorfismo definido por $f(p(x)) = p'(x)$. Hallar los autovalores y autovectores de f. ($p'(x)$ es el polinomio derivado de $p(x)$).

13. Determinar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ sabiendo:

    a) $Im(f) = L\{(0, 1, -1), (2, 1, 1)\}$.

    b) $\lambda = 0$ es un valor propio de f.

    c) El subespacio propio asociado a $\lambda = 0$ está generado por $(0, 1, 1)$.

    Hallar, si es posible, una base de $\mathbb{R}^3$ en la que f venga dado por una matriz diagonal.

14. Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$:

$$V = L\{(1, -1)\} \qquad W \equiv \{x + 2y = 0\},$$

determínese la proyección, P, sobre V a lo largo de W. ¿Cuál es la proyección de $v = (1, 2)$ sobre V a lo largo de W?

15. Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$V = L\{(1, -1, -1), (0, 1, -2)\} \qquad W = L\{(1, -1, 0)\},$$

pruébese que son complementarios y determínese la proyección, P, sobre V a lo largo de W. ¿Cuál es la proyección de $v = (-2, 1, 3)$ sobre V a lo largo de W?

16. Dados los subespacios complementarios de $\mathbb{R}^3$:

$$V = L\{(1, 1, 1), (1, 2, 2)\}, \qquad W = L\{(1, 2, 3)\},$$

se pide:

    i) Hallar la proyección, P, sobre V a lo largo de W y la proyección, Q, sobre W a lo largo de V.

ii) ¿Cuál es la proyección de $v = (2, -1, 1)$ sobre W a lo largo de V?

iii) Comprobar que P y Q son dos proyecciones.

iv) Probar que $V = Im(P) = Ker(Q)$ y que $W = Ker(P) = Im(Q)$.