1. DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS

Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de V, $f \in End(V)$, con V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, y sean

$$B = \{e_1, \ldots, e_n\} \qquad B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$$

bases de V. La matriz de f con respecto a la base B, $M(f, B, B) = M(f, B)$, y la matriz de f con respecto a la base B', $M(f, B', B') = M(f, B')$, están relacionadas, como vimos en el capítulo anterior, por la matriz de cambio de base $P = M(B, B')$ del modo que refleja el diagrama conmutativo siguiente:

$$V \xrightarrow{f} V$$

$$\begin{array}{ccccc} & x_B & \xrightarrow{M(f,B)} & y_B & \\ P & \downarrow & & \downarrow & P \\ & x_{B'} & \xrightarrow{M(f,B')} & y_{B'} & \end{array}$$

Así, $M(f, B) = P^{-1}M(f, B')P$, de modo que las matrices $M(f, B)$ y $M(f, B')$ son semejantes (recuérdese que dos matrices $A, C \in M_n(\mathbb{R})$ son semejantes si $C = P^{-1}AP$ con $P \in M_n(\mathbb{R})$ regular).

Podemos preguntarnos si es posible encontrar una base B respecto de la cual la matriz asociada a f, $M(f, B)$, sea diagonal. El interés por encontrar una matriz tan sencilla radica en que permite estudiar más fácilmente el comportamiento de la aplicación lineal.

Desafortunadamente, no siempre existirá una tal matriz diagonal asociada a f. En este capítulo veremos cuáles son las situaciones en que la aplicación f admite estas representaciones matriciales y cómo obtenerlas.

1.1. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Definición 1. *(Autovalores y autovectores)*

Sea $f : V \to V$ un endomorfismo del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V.

i) Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, diremos que λ es autovalor *o* valor propio *de $f \in End(V)$ si existe $v \in V$, con $v \neq \bar{0}$, tal que $f(v) = \lambda v$.*

ii) A v se le llama autovector *o* vector propio *asociado al autovalor λ.*

iii) Llamamos subespacio propio *asociado a un autovalor λ, denotado por V_λ, al conjunto de todos los vectores propios asociados a λ más el vector $\bar{0}$, esto es,*

$$V_\lambda = \{v \in V \ tal\ que\ f(v) = \lambda v\} =$$

$$= \{v \in V \ tal\ que\ (f - \lambda Id)(v) = \bar{0}\} = Ker(f - \lambda Id)$$

Obsérvese que V_λ es un subespacio vectorial de V.

Definición 2. *(Polinomio característico)*

Sea $f \in End(V)$ y sea $A = M(f, B)$ una matriz asociada al endomorfismo f para cierta base B de V. Llamamos polinomio característico *asociado a A al polinomio de grado n $P(\lambda) = Det(A - \lambda Id)$. A la ecuación $P(\lambda) = 0$ se le llama* ecuación característica *asociada a A.*

Propiedades.

1. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se tiene

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} Tr(A) \lambda^{n-1} + \cdots + Det(A)$$

2. Dos matrices semejantes tienen siempre el mismo polinomio característico. En particular, tendrán el mismo determinante y la misma traza.

3. Asignamos a f un único polinomio característico, $P(\lambda)$, que será el de cualquiera de sus matrices asociadas $A = M(f, B)$ (todas ellas son semejantes).

4. Los autovalores asociados a f serán las raíces $\lambda_i \in \mathbb{K}$ de $P(\lambda) = 0$.

5. Dado V_λ un subespacio propio de f, $dim(V_\lambda) = n - r(A - \lambda Id)$ para cualquier matriz A asociada a f.

6. Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ son vectores propios asociados a autovalores distintos de f, entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ son l.i..
7. Si $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_r}$ son subespacios propios asociados a autovalores distintos de f, entonces $V_{\lambda_i} \cap (\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j}) = \bar{0}$.

1.2. ENDOMORFISMOS DIAGONALIZABLES

Definición 3. *(Multiplicidades algebraica y geométrica)*

Sea $f \in End(V)$ con autovalores asociados $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$.

1. *Llamamos* multiplicidad algebraica *del autovalor λ_i al mayor exponente α_i para el cual el factor $(\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i}$ aparece en la factorización de $P(\lambda)$ ($P(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i} q(\lambda)$).*

2. *Llamamos* multiplicidad geométrica *de λ_i a la dimensión del subespacio propio V_{λ_i}.*

Observación 1. *Sea $f \in End(V)$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de multiplicidad algebraica α, entonces*

$$1 \leq dim(V_\lambda) \leq \alpha$$

Definición 4. *(Endomorfismo diagonalizable)*

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable *si es semejante a una matriz diagonal D. Decimos que $f \in End(V)$ es* diagonalizable *si existe una base B de V respecto de la cual la matriz asociada a f, $M(f, B)$, es diagonal.*

Propiedades.

1. $f \in End(V)$ es diagonalizable si y sólo si cualquier matriz $A = M(f, B)$ asociada a él es diagonalizable.
2. f es diagonalizable si y sólo si existe una base de V formada por vectores propios de f.

Aunque el siguiente teorema es válido en cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, lo enunciaremos para el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Teorema 1. *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con $dim(V) = n$ y sea $f \in End(V)$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ los autovalores de f de multiplicidades algebraicas $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Entonces f es diagonalizable si y sólo si:*

i) $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = n$ *(todas las raices de $P(\lambda)$ son reales).*

ii) Para cada autovalor λ_i se tiene que $dim(V_{\lambda_i}) = \alpha_i$.

Corolario 1. *i) Si $dim(V) = n$ y $f \in End(V)$ tiene n autovalores distintos, entonces f es diagonalizable.*

ii) Si $f \in End(V)$ es diagonalizable con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, entonces se tiene la suma directa $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$, esto es, $V = V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_r}$ y $V_{\lambda_i} \cap (\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j}) = \bar{0}$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$.

1.3. ALGORITMO DE DIAGONALIZACIÓN

Dado V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) y dado $f \in End(V)$, consideremos $A = M(f, B_0)$ una matriz asociada a f con respecto a cierta base B_0 fija. Ofrecemos, a modo de resumen, el siguiente algoritmo que permite determinar cuándo f es diagonalizable y, en caso de serlo, calcula explícitamente una matriz diagonal asociada a f, $D = M(f, B)$, con respecto a cierta base B, así como la matriz de cambio de base $P = M(B, B_0)$ que verifica $D = P^{-1}AP$.

$$V \xrightarrow{f} V$$

$$\begin{array}{ccccc} & x_B & \xrightarrow{D} & y_B & \\ P & \downarrow & & \downarrow & P \\ & x_{B_0} & \xrightarrow{A} & y_{B_0} & \end{array}$$

Algoritmo de diagonalización

Paso 1. Hallar el polinomio característico $P(\lambda)$ de f y determinar sus raíces para obtener los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de f. Si alguna raíz es compleja, f no es diagonalizable.

Paso 2. Supuesto que todas las raíces de $P(\lambda)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, son reales, f será diagonalizable si y sólo si $dim(V_{\lambda_i}) = \alpha_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Paso 3. Supuesto que $dim(V_{\lambda_i}) = \alpha_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, entonces calculamos una base $B(V_{\lambda_i}) = \{v_{i,1}, \ldots, v_{i,\alpha_i}\}$ para cada subespacio V_{λ_i}. (Los vectores de estas bases son vectores propios asociados a λ_i).

Paso 4. Considerar la colección de todos los vectores de todas las bases obtenidas

$$B = \{v_{1,1}, \ldots, v_{1,\alpha_1}, \ldots, v_{r,1}, \ldots, v_{r,\alpha_r}\}$$

Se tiene que B es una base de V formada por autovectores de f y $D = M(f, B)$ es diagonal con

$$D = M(f,B) = \begin{pmatrix} \left|\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}\right| & & \\ & \ddots & \\ & & \left|\begin{matrix} \lambda_r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{matrix}\right| \end{pmatrix}$$

donde la caja de cada λ_i tiene tamaño α_i.

Resulta $D = P^{-1}AP$ con P la matriz que tiene por columnas a las coordenadas de los vectores de la base B.

1.4. EJEMPLO DE ENDOMORFISMO DIAGONALIZABLE: PROYECCIÓN

Proposición 1. *Dados dos subespacios complementarios, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, de un espacio vectorial V ($V = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$) y dado $v \in V$, sabemos que v se descompone de modo único como $v = x + y$ con $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$. Existe un único endomorfismo de V, P, tal que $P(v) = x$. A P se le llama proyección sobre $\mathcal{X}$ a lo largo de $\mathcal{Y}$ y cumple las siguientes propiedades:*

- $P^2 = P$ *(P es idempotente).*
- $I - P$ *es la proyección sobre $\mathcal{Y}$ a lo largo de $\mathcal{X}$.*
- $Im(P) = \{x \text{ tales que } P(x) = x\}$.

- *$Im(P) = Ker(I - P) = \mathcal{X}$ y $Im(I - P) = Ker(P) = \mathcal{Y}$*
- *Si $V = \mathbb{R}^n$, entonces la matriz asociada a P con respecto a la base canónica es:*

$$M(P, B_c) = [\mathbf{X}|\mathbf{Y}] \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [\mathbf{X}|\mathbf{Y}]^{-\mathbf{1}} = [\mathbf{X}|\mathbf{0}][\mathbf{X}|\mathbf{Y}]^{-\mathbf{1}},$$

  donde las columnas de $\mathbf{X}$ y de $\mathbf{Y}$ son bases de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ respectivamente.

- *La matriz asociada a la proyección P con respecto a la base de $\mathbb{R}^n$, $B = \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$, formada por la unión de las dos bases de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ será una matriz diagonal con dos autovalores: el 1 y el 0.*

$$M(P, B) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Las multiplicidades algebraicas coinciden, respectivamente, con las dimensiones de $\mathcal{X} = V_1$ e $\mathcal{Y} = V_0$, que son los subespacios propios asociados.

Proposición 2. *Un endomorfismo $P : V \to V$ es una proyección si y sólo si $P^2 = P$ (idempotente).*

La implicación directa es obvia. Por otro lado, si $P^2 = P$, se prueba fácilmente que P es una proyección sobre $\mathcal{X} = Im(P)$ a lo largo de $\mathcal{Y} = Ker(P)$.