1. APLICACIONES LINEALES

1. Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + y, y, x - 2y)$. Sí es lineal.
   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. No es lineal. Basta observar que $f(2(1, 1)) = f(2, 2) = 4$, que es distinto de $2f(1, 1) = 2$.
   c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$. No es lineal. Basta observar que $f(0, 0) \neq (0, 0, 0)$.
   d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (z, y + x)$. Sí es lineal.
   e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = |x - y|$. No es lineal. Basta observar que $f(-1(1, 0)) = 1$ es distinto de $-f(1, 0) = -1$.
   f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$, $f(x, y, z) = (y + z)t^2 + (x + y)t + z$. Sí es lineal.
   g) $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $f(A) = A^T$. Sí es lineal. Se tiene que $f((A + B)) = (A + B)^T = A^T + B^T = f(A) + f(B)$ y $f(\lambda A) = (\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda f(A)$.

   Los resultados no probados se dejan como tarea para el alumno.

2. Dadas f y g de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 - x_3)$ y $g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2 - 1, x_3)$, ver si son lineales y, en ese caso, hallar el núcleo y la imagen.

   La aplicación f es lineal. La comprobación se deja como ejercicio para el alumno. La aplicación g no es lineal ($g(0, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$).

   $$Ker(f) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\bar{x}) = \bar{0}\} =$$

   $$= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, x_2 = 0, x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

   Dicho de otro modo, $Ker(f)$ es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones cartesianas

   $$Ker(f) \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

   Al resolver, resulta $Ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$. Por otro lado, $Im(f) = L(f(B))$, siendo B cualquier base del espacio de partida $\mathbb{R}^3$, por ejemplo la base canónica. Así:

   $$Im(f) = L(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) =$$

   $$= L((1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, -1)) = \mathbb{R}^3$$

3. Determinar la dimensión y bases de $Ker(f)$ e $Im(f)$ para las siguientes aplicaciones lineales:

   a) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_1 + x_2, 3x_3)$.
   Se tiene
   $$Ker(f) = \begin{cases} 2x_1 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \\ 3x_3 & = & 0 \end{cases}$$
   Dicho de otro modo, $Ker(f) = \{(0,0,0)\}$, con lo que $dim(Ker(f)) = 0$ y no hay base. Por otro lado, si B_c es la base canónica de $\mathbb{R}^3$,
   $$Im(f) = L((f(B_c)) = L((2,1,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbb{R}^3.$$
   Para llegar a esta conclusión habría bastado aplicar la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales, que permite concluir que $dim(Im(f)) = 3$. Una base de $Im(f)$ es cualquier base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo la canónica.

   b) $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 - 2x_2, x_2)$.
   Calculemos $Ker(f)$:
   $$Ker(f) \equiv \begin{cases} 2x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \end{cases}$$
   de modo que $Ker(f) = \{(0,0)\}$ y $dim(Ker(f)) = 0$.
   Por otro lado,
   $$Im(f) = L(f(B_c)) = L((2,1,0),(1,-2,1))$$
   con lo que $dim(Im(f)) = 2$ y una base suya es $B_{Im(f)} = \{(2,1,0),(1,-2,1)\}$

   c) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 - x_3)$.
   Se tiene
   $$Ker(f) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$
   de modo que $Ker(f) = \{(0,0,0)\}$ y $dim(Ker(f)) = 0$, por lo que no hay base. Si aplicamos la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales, $3 = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$, de manera que $dim(Im(f)) = 3$ y, por tanto, $Im(f) = \mathbb{R}^3$.

   d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_3 + x_4)$.
   Calculemos $Ker(f)$:
   $$Ker(f) = \begin{cases} x_1 - x_2 & = & 0 \\ 2x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Pasando a ecuaciones paramétricas queda

$$Ker(f) \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = -\mu \\ x_4 = 2\mu \end{cases}$$

Por tanto, $dim(Ker(f)) = 2$ y una base es

$$B_{Ker(f)} = \{(1,1,0,0),(0,0,-1,2)\}.$$

La dimensión de la imagen de f es $dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^4) - dim(Ker(f)) = 4 - 2 = 2$. Al estar $Im(f)$ contenida en $\mathbb{R}^2$, resulta $Im(f) = \mathbb{R}^2$. Una base puede ser $B_{Im(f)} = \{(1,0),(0,1)\}$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ el homomorfismo definido por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea W el subespacio de $\mathbb{R}^2$ definido por $x_1 - x_2 = 0$. Hallar las ecuaciones de $f^{-1}(W)$.

El subespacio vectorial $f^{-1}(W)$ se define como

$$f^{-1}(W) = \{\bar{x} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : f(\bar{x}) \in W\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 : A\bar{x} \in W\},$$

esto es,

$$f^{-1}(W) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : (x-y, x+z+2t) \in W\} =$$

$$= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - (x+z+2t) = 0\}$$

La ecuación cartesiana de $f^{-1}(W)$ es:

$$f^{-1}(W) \equiv \{y + z + 2t = 0\}$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

y sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones $x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + x_4 = 0$. ¿Cuáles son las ecuaciones de $f(W)$ en $\mathbb{R}^3$?

Téngase en cuenta que $f(W) = L(f(B_W))$, siendo B_W una base del subespacio W. El primer paso será obtener B_W.

$$W \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Al pasar a paramétricas,

$$W \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2}\mu \\ x_2 = -\frac{1}{2}\mu \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = \mu \end{array} \right.$$

de modo que una base de W es $B_W = \{(-1, -1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\}$.

Concluimos

$$f(W) = L(f(-1, -1, 0, 2), f(0, 0, 1, 0)) =$$

$$= L((4, 0, -4), (-1, 0, 1)) = L((-1, 0, 1))$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$f(W) \equiv \left\{ \begin{array}{l} y_1 = -\lambda \\ y_2 = 0 \\ y_3 = \lambda \end{array} \right.$$

Obtengamos las ecuaciones cartesianas. Sea $(y_1, y_2, y_3) \in f(W)$. Entonces

$$1 = r \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

se escoge -1 como menor no nulo de orden máximo y se extiende a dos menores de orden 2 nulos que dan lugar a las ecuaciones:

$$f(W) \equiv \left\{ \begin{array}{l} y_1 + y_3 = 0 \\ y_2 = 0 \end{array} \right.$$

6. Sean $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{e'_1, e'_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Se define $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de la siguiente forma: $f(e_1) = e'_1 - e'_2$, $f(e_2) = 2e'_1$, $f(e_3) = e'_1 - 2e'_2$. Hallar las ecuaciones de f, $dim(Ker(f))$ y $dim(Im(f))$. Determinar si f es un monomorfismo, un epimorfismo o un isomorfismo.

La matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de las bases B y B' es:

$$A = M(f, B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Dado un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, con coordenadas $X_B = (x_1, x_2, x_3)$ respecto de la base B y, dada su imagen $f(\bar{x}) = \bar{y}$ con coordenadas $Y_{B'} = (y_1, y_2)$ respecto de B', se tiene la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

A esta expresión se la llama ecuación matricial de f respecto de las bases B y B'.

Las ecuaciones de f son

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = -x_1 - 2x_3 \end{cases}$$

Por otro lado, dado que las columnas de la matriz A son las coordenadas de un sistema de generadores de $Im(f)$, entonces $dim(Im(f)) = r(A) = 2$. En consecuencia, $Im(f) = \mathbb{R}^2$. Por la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales, $dim(Ker(f)) = 3 - 2 = 1$. El homomorfismo f es un epimorfismo y no es un monomorfismo ni, por tanto, un isomorfismo.

7. Sea la aplicación $f : E \to F$, con E y F de dimensiones 3 y 4 respectivamente, definida de la siguiente forma: $f(e_2) = -e'_1 + e'_2 - e'_4$, $f(e_3) = e'_1 + e'_2 - e'_3 + e'_4$ y $e_1 \in Ker(f)$. Hallar dimensión y una base para $Ker(f)$ y para $Im(f)$.

   Calculemos la matriz $A = M(f, B, B')$, siendo $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ bases de E y F respectivamente.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Entonces

$$dim(Im(f)) = r(A) = 2 \qquad dim(Ker(f)) = dim(E) - dim(Im(f)) = 1$$

   Sabemos que $Im(f) = L((-1, 1, 0, 1), (1, 1, -1, 1))$, de modo que $B_{Im(f)} = \{(-1, 1, 0, 1), (1, 1, -1, 1)\}$, todo ello con coordenadas respecto de B'. Así que $Im(f) = L(-e'_1 + e'_2 - e'_4, e'_1 + e'_2 - e'_3 + e'_4)$, y una base suya es $B_{Im(f)} = \{-e'_1 + e'_2 - e'_4, e'_1 + e'_2 - e'_3 + e'_4\}$.

Falta ahora determinar una base de $Ker(f)$.

$$Ker(f) \equiv \begin{cases} -x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \\ -x_2 + x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Pasando a paramétricas

$$Ker(f) \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Por consiguiente, una base es $B_{Ker(f)} = \{e_1\}$ (téngase en cuenta que $(1,0,0)$ son las coordenadas de e_1 respecto de B).

8. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida de la siguiente forma: $f(2,-1) = (1,0,-1,3)$ y $f(4,1) = (2,-2,3,1)$. Calcular:

   a) La matriz asociada respecto de las bases canónicas.

   b) Las ecuaciones de $Im(f)$.

   Resolvamos a).

$$f(1,0) = f\left(\frac{1}{6}\left((2,-1) + (4,1)\right)\right) = \frac{1}{6} f\left((2,-1) + (4,1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(f(2,-1) + f(4,1)\right) = \frac{1}{6}\left((1,0,-1,3) + (2,-2,3,1)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

   Por otro lado,

$$f(0,1) = f\left(\frac{1}{3}\left(-2(2,-1) + (4,1)\right)\right) = \frac{1}{3} f\left(-2(2,-1) + (4,1)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(-2f(2,-1) + f(4,1)\right) = \frac{1}{3}\left(-2(1,0,-1,3) + (2,-2,3,1)\right) =$$

$$= \left(0, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

   Por consiguiente, la matriz $A = M(f, B_c, B_c')$, siendo B_c y B_c' las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente, es

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 5/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz también se puede hallar observando que

$$M(f, B_c, B_c') = M(f, B, B_c')M(B_c, B)$$

siendo B la base $B = \{(2,-1),(4,1)\}$. Se tiene

$$M(f, B, B_c') = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$M(B_c, B) = M(B, B_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -2/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Sólo queda multiplicar las dos matrices:

$$M(f, B_c, B_c') = M(f, B, B_c')M(B_c, B) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 5/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado b). Se tiene $Im(f) = L((1,0,-1,3),(2,-2,3,1))$, de manera que una base suya es la formada por estos dos vectores. Las ecuaciones paramétricas son

$$Im(f) \equiv \begin{cases} y_1 = \lambda + 2\mu \\ y_2 = -2\mu \\ y_3 = -\lambda + 3\mu \\ y_4 = 3\lambda + \mu \end{cases}$$

Determinemos las ecuaciones cartesianas de $Im(f)$. Sea $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in Im(f)$. Entonces

$$2 = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

de modo que las ecuaciones cartesianas son

$$Im(f) \equiv \begin{cases} -2y_1 - 5y_2 - 2y_3 & = & 0 \\ 6y_1 + 5y_2 - 2y_4 & = & 0 \end{cases}$$

9. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida de la siguiente forma: $f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + x_3)e_2 + (x_2 - x_1)e_3$.

   a) Calcular la expresión analítica.
   b) Encontrar los vectores invariantes.
   c) Calcular las ecuaciones de $Ker(f)$ e $Im(f)$.
   d) Hallar una base de $Ker(f)$ y ampliarla a $\mathbb{R}^3$.
   e) Hallar la expresión analítica respecto de esta última base.

   Resolvamos a). La matriz $A = M(f, B, B)$ con $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   La expresión analítica es

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & x_2 + x_3 \\ y_2 & = & x_1 + x_3 \\ y_3 & = & -x_1 + x_2 \end{array} \right.$$

   Resolvamos b). Los vectores invariantes, $Invar(f)$, son aquellos $\bar{x}$ tales que $\bar{x} = f(\bar{x})$. Es fácil probar que $Invar(f)$ tiene estructura de subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$$Invar(f) = \{\bar{x} : A\bar{x} = \bar{x}\}$$

$$Invar(f) \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_2 = x_1 + x_3 \\ x_3 = -x_1 + x_2 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right. \sim$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right.$$

   Si se pasa a paramétricas y se obtiene una base, resulta $Invar(f) = L((1, 1, 0))$ (con coordenadas respecto de B), esto es, la recta engendrada por el vector $e_1 + e_2$ es una recta invariante (la imagen de cada vector es él mismo).

   Resolvamos c). El núcleo $Ker(f)$ es

$$Ker(f) \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$Ker(f) \equiv \left\{ \begin{array}{lll} x_1 & = & -\lambda \\ x_2 & = & -\lambda \\ x_3 & = & \lambda \end{array} \right.$$

Por otro lado,

$$Im(f) = L((0,1,-1),(1,0,1),(1,1,0)) = L((0,1,-1),(1,0,1))$$

Es claro que $B_{Im(f)} = \{(0,1,-1),(1,0,1)\}$, de modo que las ecuaciones paramétricas son

$$Im(f) \equiv \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \mu \\ y_2 = \lambda \\ y_3 = -\lambda + \mu \end{array} \right.$$

Para obtener las ecuaciones implícitas, consideramos un vector $\bar{y} \in Im(f)$ con coordenadas (y_1, y_2, y_3) respecto de la base B. Entonces

$$2 = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

por lo que la ecuación cartesiana es $Im(f) \equiv \{-y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$.
Resolvamos el apartado d). Una base de $Ker(f)$ es $B_{Ker(f)} = \{(-1,-1,1)\}$, con coordenadas respecto de B, esto es, $B_{Ker(f)} = \{-e_1 - e_2 + e_3\}$. Para extenderlo a una base de $\mathbb{R}^3$ basta escoger otros dos vectores que, junto al primero, sean base; por ejemplo, $B_{\mathbb{R}^3} = \{(-1-1,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$, con coordenadas respecto de B, de manera que $B_{\mathbb{R}^3} = \{-e_1 - e_2 + e_3, e_2, e_3\}$
Estudiemos el apartado e). Sabemos que

$f(-e_1 - e_2 + e_3) = \bar{0} = 0(-e_1 - e_2 + e_3) + 0e_2 + 0e_3$

$f(e_2) = e_1 + e_3 = -1(-e_1 - e_2 + e_3) - 1e_2 + 2e_3$

$f(e_3) = e_1 + e_2 = -1(-e_1 - e_2 + e_3) + 0e_2 + 1e_3$

De manera que la matriz asociada a f respecto a esta base es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La expresión analítica es

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = -x_2 - x_3 \\ y_2 = -x_2 \\ y_3 = 2x_2 + x_3 \end{array} \right.$$

10. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(1,0,1) = (0,1)$, $f(0,0,-1) = (1,1)$, $f(2,1,1) = (1,0)$

a) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas.

b) Hallar la matriz de f respecto de las bases

$$B_1 = \{(1,0,1),(0,0,-1),(2,1,1)\} \text{ y } B_2 = \{(0,1),(1,0)\}.$$

c) Hallar ecuaciones y dimensión de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

Resolvamos el apartado a). Se tiene

$f(1,0,0) = f((1,0,1)+(0,0,-1)) = f(1,0,1) + f(0,0,-1) =$

$= (0,1) + (1,1) = (1,2).$

$f(0,1,0) = f((2,1,1) - 2(1,0,1) - (0,0,-1)) =$

$= f(2,1,1) - 2f(1,0,1) - f(0,0,-1) = (0,-3).$

$f(0,0,1) = f(-(0,0,-1)) = (-1,-1).$

De modo que, si B_c y B_c' son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente, la matriz $A = M(f, B_c, B_c')$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado b). La matriz $M(f, B_1, B_2)$ es

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos el apartado c). Para determinar las ecuaciones de $Ker(f)$ y de $Im(f)$ basta considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $Im(f) = L((1,2),(0,-3),(-1,1)) = \mathbb{R}^2$, $dim(Im(f)) = 2$.

Por la fórmula de las dimensiones, $dim(Ker(f)) = 3 - 2 = 1$. Las ecuaciones cartesianas son

$$Ker(f) \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

11. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Se pide :

a) Calcular "a" para que f sea inyectiva.

b) Si f no es inyectiva, hallar $f(L_1)$, siendo L_1 el subespacio de ecuaciones $2x_1 - x_3 = 0$.

c) Sea L_2 el subespacio de ecuaciones $x_1 + x_2 - x_4 = 0$, $3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0$ y f no inyectiva. Hallar una base de $L_2 \cap f(L_1)$ y de $L_2 + f(L_1)$.

Resolvamos a). Se tiene

$$f \text{ inyectiva } \Longleftrightarrow dim(Ker(f)) = 0 \Longleftrightarrow dim(Im(f)) = r(F) = 3$$

Por otro lado,

$$r(F) = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & a \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

De manera que f es inyectiva si y sólo si $a \neq 2$.

Resolvamos b). Tenemos $a = 2$. Al pasar L_1 a paramétricas y obtener una base, resulta $B_{L_1} = \{(1,0,2),(0,1,0)\}$. Por consiguiente,

$$f(L_1) = L(f(1,0,2), f(0,1,0)) = L((3,2,10,5),(0,1,2,1))$$

El cálculo de las ecuaciones cartesianas es una tarea rutinaria, dando como resultado

$$f(L_1) \equiv \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Resolvamos el apartado c). Tenemos $a = 2$. Las ecuaciones de L_2 son

$$L_2 \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 & = & 0 \\ -x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Pasando a paramétricas se obtiene una base para L_2,

$$B_{L_2} = \{(-1,1,0,0),(1,0,2,1)\}.$$

Las ecuaciones cartesianas de L_2 unidas a las de $f(L_1)$ dan lugar a

$$L_2 \cap f(L_1) \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 - x_4 & = & 0 \\ -x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 - x_4 & = & 0 \\ -x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Pasando a paramétricas,

$$L_2 \cap f(L_1) \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Una base es $B_{L_2 \cap f(L_1)} = \{(-1,1,0,0)\}$.

Obtengamos ahora una base para

$$L_2 + f(L_1) = L((3,2,10,5),(0,1,2,1),(-1,1,0,0),(1,0,2,1)\}$$

Escalonando la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 10 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right)$$

se tiene una base de $L_2 + f(L_1)$, $B_{L_2+f(L_1)} = \{(1,0,2,1),(0,1,2,1)\}$.

12. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, definida por $f(p(x)) = p'(x)$. Hallar la matriz asociada (con respecto a la base $B = \{1, x, x^2\}$), ecuaciones, $Ker(f)$, $Im(f)$. Determinar si es un monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo.

    Como

$$\begin{array}{ccccc} f(1) & = & 0 & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ f(x) & = & 1 & = & 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ f(x^2) & = & 2x & = & 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2, \end{array}$$

    la matriz $F = M(f, B, B)$ es

$$F = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

    De manera que la ecuación matricial es

$$\left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right)$$

Como $r(F) = 2$, se tiene que $dim(Im(f)) = 2$, de modo que f no es epimorfismo. Por otro lado, $dim(Ker(f)) = dim(\mathbb{R}_2[x]) - dim(Im(f)) = 3 - 2 = 1$, con lo que f tampoco es un monomorfismo.

$$Ker(f) \equiv \left\{ \begin{array}{c} x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Resulta $Ker(f) = L((1, 0, 0))$ con coordenadas respecto de B, esto es, $Ker(f) = L(1) = \{\text{polinomios constantes}\}$.

Obsérvese que $Im(f) = L((1, 0, 0), (0, 2, 0))$ con coordenadas respecto de B, esto es, $Im(f) = L(\{1, 2x\})$. Las ecuaciones paramétricas son

$$Im(f) \equiv \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \lambda \\ y_2 = 2\mu \\ y_3 = 0 \end{array} \right.$$

y las implícitas

$$Im(f) \equiv \{y_3 = 0\}$$

13. Sean

$$B_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \text{ y } B_1' = \{(1, -1, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$$

bases de $\mathbb{R}^3$. Sean B_c la base canónica y

$$B_2 = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$$

bases de $\mathbb{R}^4$.

a) ¿Qué vector de $\mathbb{R}^3$ tiene, respecto a la base B_1, coordenadas $(1, 2, -1)$ y cuáles son éstas respecto a B_1'?

b) Calcular las matrices de cambio de base de B_1 en B_1' y de B_c en B_2.

c) Siendo f el homomorfismo caracterizado por $f(1, 1, 0) = (1, 1, 0, 0)$, $f(1, 0, 1) = (1, 0, 1, 0)$ y $f(0, 1, 1) = (0, 0, 1, 1)$, hallar la matriz de f respecto de B_1 y B_c, respecto de B_1 y B_2, respecto de B_1' y B_c y respecto de B_1' y B_2.

Resolvamos el apartado a). Buscamos un vector $\bar{x}$ tal que sus coordenadas respecto de la base B_1 sean $X_{B_1} = (1, 2, -1)$. Esto quiere decir que

$$\bar{x} = 1(1, 1, 0) + 2(1, 0, 1) - 1(0, 1, 1) = (3, 0, 1)$$

De modo que las coordenadas de $\bar{x}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, B_c', son $X_{B_c'} = (3, 0, 1)$.

Buscamos ahora las coordenadas de $\bar{x}$ respecto de B_1', $X_{B_1'}$. Téngase en cuenta que $X_{B_1'} = M(B_c', B_1')X_{B_c'}$. La matriz $M(B_c', B_1')$ es

$$M(B_1', B_c')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$X_{B_1'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado b). Determinemos $P = M(B_1, B_1')$. Téngase en cuenta que $M(B_1, B_1') = M(B_c', B_1')M(B_1, B_c')$. Como

$$M(B_1, B_c') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M(B_c', B_1') = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$P = M(B_1, B_1') = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Falta calcular la matriz $Q = M(B_c, B_2)$. Se tendrá

$$Q = M(B_c, B_2) = M(B_2, B_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado c). La matriz $F = M(f, B_1, B_c)$ es

$$F = M(f, B_1, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinemos ahora $G = M(f, B_1, B_2)$. Resulta

$$G = M(B_c, B_2)M(f, B_1, B_c) = QF = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Hallemos $H = M(f, B_1', B_c)$. Como $M(f, B_1', B_c) = M(f, B_1, B_c)M(B_1', B_1) = FP^{-1}$ resulta

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Tan sólo queda calcular $I = M(f, B_1', B_2) = M(B_c, B_2)M(f, B_1', B_c) = QH$. Se tendrá

$$I = \begin{pmatrix} 5/6 & 5/6 & -7/6 \\ -2/3 & 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 4/3 \\ 5/6 & -7/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$

14. Sea la aplicación $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, a + b + c, 0)$$

a) Probar que f es lineal y hallar su matriz respecto de las bases canónicas.

b) Obtener las bases, dimensión y ecuaciones implícitas de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

Resolvamos el apartado a). La demostración de la linealidad de f es rutinaria y se deja como ejercicio para el alumno. La matriz asociada a f respecto de las bases canónicas es

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiemos b). Comenzamos con el cálculo de las dimensiones.

$$dim(Im(f)) = r(F) = 2$$

y

$$dim(Ker(f)) = dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) - dim(Im(f)) = 4 - 2 = 2$$

Una base para $Im(f)$ se obtiene a partir de las columnas de F:

$$B_{Im(f)} = \{(1,1,0),(0,1,0)\}$$

La ecuación implícita es

$$Im(f) \equiv \{y_3 = 0\}$$

Las ecuaciones implícitas del núcleo son

$$Ker(f) \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Una base es $B_{Ker(f)} = \{(0,-1,0),(0,0,1)\}$