1. EJERCICIOS

1. Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + y, y, x - 2y)$.
   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$.
   c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$.
   d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (z, y + x)$.
   e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = |x - y|$.
   f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$, $f(x, y, z) = (y + z)t^2 + (x + y)t + z$.
   g) $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $f(A) = A^T$.

2. Dadas f y g de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 - x_3)$ y $g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2 - 1, x_3)$, ver si son lineales y, en ese caso, hallar el núcleo y la imagen.

3. Determinar la dimensión y bases de $Ker(f)$ e $Im(f)$ para las siguientes aplicaciones lineales:

   a) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_1 + x_2, 3x_3)$.
   b) $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 - 2x_2, x_2)$.
   c) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 - x_3)$.
   d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_3 + x_4)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ el homomorfismo definido por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   y sea W el subespacio de $\mathbb{R}^2$ definido por $x_1 - x_2 = 0$. Hallar las ecuaciones de $f^{-1}(W)$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   y sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones $x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + x_4 = 0$. ¿Cuáles son las ecuaciones de $f(W)$ en $\mathbb{R}^3$?

6. Sean $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{e'_1, e'_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Se define $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de la siguiente forma: $f(e_1) = e'_1 - e'_2$, $f(e_2) = 2e'_1$, $f(e_3) = e'_1 - 2e'_2$. Hallar las ecuaciones de f, $dim(Ker(f))$ y $dim(Im(f))$. Determinar si f es un monomorfismo, un epimorfismo o un isomorfismo.

7. Sea la aplicación $f : E \to F$, con E y F de dimensiones 3 y 4 respectivamente, definida de la siguiente forma: $f(e_2) = -e'_1 + e'_2 - e'_4$, $f(e_3) = e'_1 + e'_2 - e'_3 + e'_4$ y $e_1 \in Ker(f)$. Hallar dimensión y una base para $Ker(f)$ y para $Im(f)$.

8. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida de la siguiente forma: $f(2, -1) = (1, 0, -1, 3)$ y $f(4, 1) = (2, -2, 3, 1)$. Calcular:

   a) La matriz asociada respecto de las bases canónicas.

   b) Las ecuaciones de $Im(f)$.

9. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida de la siguiente forma: $f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + x_3)e_2 + (x_2 - x_1)e_3$.

   a) Calcular la expresión analítica.

   b) Encontrar los vectores invariantes.

   c) Calcular las ecuaciones de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

   d) Hallar una base de $Ker(f)$ y ampliarla a $\mathbb{R}^3$.

   e) Hallar la expresión analítica respecto de esta última base.

10. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(1, 0, 1) = (0, 1)$, $f(0, 0, -1) = (1, 1)$, $f(2, 1, 1) = (1, 0)$

    a) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas.

    b) Hallar la matriz de f respecto de las bases

    $$B_1 = \{(1, 0, 1), (0, 0, -1), (2, 1, 1)\} \text{ y } B_2 = \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

    c) Hallar ecuaciones y dimensión de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

11. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

    $$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

    Se pide :

    a) Calcular "a" para que f sea inyectiva.

b) Si f no es inyectiva, hallar $f(L_1)$, siendo L_1 el subespacio de ecuaciones $2x_1 - x_3 = 0$.

c) Sea L_2 el subespacio de ecuaciones $x_1 + x_2 - x_4 = 0$, $3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0$ y f no inyectiva. Hallar una base de $L_2 \cap f(L_1)$ y de $L_2 + f(L_1)$.

12. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, definida por $f(p(x)) = p'(x)$. Hallar la matriz asociada (con respecto a la base $B = \{1, x, x^2\}$), ecuaciones, $Ker(f)$, $Im(f)$. Determinar si es un monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo.

13. Sean

$$B_1 = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\} \text{ y } B_1' = \{(1,-1,1), (-1,1,1), (1,1,-1)\}$$

bases de $\mathbb{R}^3$. Sean B_c la base canónica y

$$B_2 = \{(1,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,0,1), (1,1,1,0)\}$$

bases de $\mathbb{R}^4$.

a) ¿Qué vector de $\mathbb{R}^3$ tiene, respecto a la base B_1, coordenadas $(1, 2, -1)$ y cuáles son éstas respecto a B_1'?

b) Calcular las matrices de cambio de base de B_1 en B_1' y de B_c en B_2.

c) Siendo f el homomorfismo caracterizado por $f(1,1,0) = (1,1,0,0)$, $f(1,0,1) = (1,0,1,0)$ y $f(0,1,1) = (0,0,1,1)$, hallar la matriz de f respecto de B_1 y B_c, respecto de B_1 y B_2, respecto de B_1' y B_c y respecto de B_1' y B_2.

14. Sea la aplicación $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, a+b+c, 0)$$

a) Probar que f es lineal y hallar su matriz respecto de las bases canónicas.

b) Obtener las bases, dimensión y ecuaciones implícitas de $Ker(f)$ e $Im(f)$.