1. APLICACIONES LINEALES

El objetivo de este capítulo es el estudio de las aplicaciones lineales u homomorfismos entre espacios vectoriales. Este tipo de aplicaciones respeta la estructura de espacio vectorial transformando subespacios vectoriales en subespacios vectoriales.

1.1. PRIMERAS DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Definición 1. *(Aplicación lineal)*

Dada una aplicación $f : V \to V'$ con V, V' $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, decimos que f es lineal *si satisface las condiciones:*

i) $f(u + v) = f(u) + f(v)$ $\forall u, v \in V$.

ii) $f(au) = af(u)$ $\forall a \in \mathbb{K}$ *y* $\forall u \in V$.

Estas dos condiciones se pueden resumir en una escribiendo:

iii) $f(au + bv) = af(u) + bf(v)$ $\forall u, v \in V$ *y* $\forall a, b \in \mathbb{K}$.

A las aplicaciones lineales también se les llama *homomorfismos* de espacios vectoriales.

Propiedades.

Dada $f : V \to V'$ una aplicación lineal, entonces:

1. $f(\bar{0}) = \bar{0}$, 2. $f(-u) = -f(u)$, 3. $f(a_1u_1 + \cdots + a_mu_m) = a_1f(u_1) + \cdots + a_mf(u_m)$.

Consecuencia de esta última propiedad es que una aplicación lineal $f : V \to V'$ queda determinada con sólo conocer las imágenes de los vectores de una base de V.

Definición 2. *(Núcleo e imagen de una aplicación lineal)*

Dada una aplicación lineal $f : V \to V'$, se define el núcleo *de f, $Ker(f)$, como el conjunto*

$$Ker(f) = \{v \in V \text{ } \textit{tal que } f(v) = \bar{0}\}$$

Llamamos imagen *de f, $Im(f)$, al conjunto*

$$Im(f) = \{f(v) \text{ } \textit{tal que } v \in V\} = f(V)$$

Propiedades.

1. El conjunto $Ker(f)$ es un subespacio vectorial de V.
2. Si W es subespacio vectorial de V, $W = L(\{v_1, \ldots, v_m\})$, entonces $f(W) = L(\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\})$. Se desprende de esto que $f(W)$ es un subespacio vectorial de V'. En particular, para $W = V$ se tiene que $Im(f) = f(V)$ es subespacio vectorial de V'. Llamaremos *rango* de la aplicación lineal f a la dimensión de la imagen, $r(f) = dim(Im(f))$.

1.2. MONOMORFISMOS, EPIMORFISMOS E ISOMORFISMOS

Definición 3. *(Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos)*

i) *Una aplicación $f : A \to B$ es* inyectiva *si $\forall a_1, a_2 \in A$, con $a_1 \neq a_2$, entonces $f(a_1) \neq f(a_2)$.*

ii) *Una aplicación $f : A \to B$ es* sobreyectiva *si $\forall b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$ o, equivalentemente, si $f(A) = B$.*

iii) *Una aplicación $f : A \to B$ es* biyectiva *si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.*

iv) *Las aplicaciones lineales inyectivas se denominan* monomorfismos, *las sobreyectivas,* epimorfismos, *y las biyectivas,* isomorfismos.

v) *Decimos que un espacio vectorial V es* isomorfo *a otro $V'(V \simeq V')$ si existe un isomorfismo $f : V \to V'$.*

vi) *Una aplicación lineal $f : V \to V$, definida de un espacio vectorial en sí mismo, se denomina* endomorfismo. *De ser isomorfismo, la llamamos* automorfismo.

Propiedades. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Se verifica:

1. f es un monomorfismo si y sólo si $Ker(f) = \{\bar{0}\}$ $(dim(Ker(f)) = 0)$.
2. f es un epimorfismo si y sólo si $Im(f) = V'$ $(r(f) = dim(V'))$.
3. f es un monomorfismo si y sólo si para todo conjunto de vectores l.i. de V, $\{v_1, \ldots, v_m\}$, se tiene que $\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\}$ también es l.i..
4. f es un epimorfismo si y sólo si para todo sistema de generadores de V, $\{v_1, \ldots, v_m\}$, se tiene que $\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\}$ es sistema de generadores de V'.
5. f es un isomorfismo si y sólo si para toda base de V, $\{v_1, \ldots, v_n\}$, se tiene que $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ es base de V'.
6. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y sea $S = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$. Entonces f es un monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo si y sólo si S es l.i., sistema de generadores de V' o base de V' respectivamente.

Teorema 1. *Dos espacios vectoriales de dimensión finita V y V' son isomorfos si y sólo si $dim(V) = dim(V')$. En particular, cualquier $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{K}^n$.*

1.3. MATRICES Y APLICACIONES LINEALES. CAMBIO DE BASE

Consideremos una aplicación lineal $f : V \to V'$, con V y V' $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Fijemos dos bases $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de V y $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ de V'.

Consideremos las imágenes de los vectores $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & a_{11}e'_1 + \cdots + a_{m1}e'_m \\ & \vdots & \\ f(e_n) & = & a_{1n}e'_1 + \cdots + a_{mn}e'_m \end{array}$$

Si $x \in V$ es un vector con coordenadas $x_B = (x_1, \dots, x_n)$ respecto de B, esto es, $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, entonces:

$$f(x) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n) =$$

$$= x_1(a_{11}e'_1 + \cdots + a_{m1}e'_m) + \cdots + x_n(a_{1n}e'_1 + \cdots + a_{mn}e'_m) =$$

$$= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)e'_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)e'_m.$$

Si denotamos por $y_{B'} = (y_1, \dots, y_m)$ a las coordenadas de $y = f(x)$ respecto de B', entonces:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ & \vdots & \\ y_m & = & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array} \right.$$

o, escrito matricialmente,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Esta es la llamada *ecuación matricial* de f respecto de las bases B y B'.

La matriz

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

tiene m filas y n columnas y se denomina *matriz asociada a f* respecto de las bases B y B'. Además, F tiene por columnas las coordenadas respecto de B' de los vectores $f(e_1), \dots, f(e_n)$. Escribiremos $F = M(f, B, B')$. La ecuación matricial de f se escribe abreviadamente como

$$y_{B'} = M(f, B, B')x_B$$

Propiedades. Sea $f : V \to V'$ lineal con $dim(V) = n$ y $dim(V') = m$. Entonces:

1. (Fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales) $dim(V) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$.
2. Dadas dos bases B y B' para V y V' respectivamente, las columnas de la matriz $F = M(f, B, B')$ son las coordenadas respecto de B' de un sistema de generadores de $Im(f)$, de modo que $r(F) = dim(Im(f)) = r(f)$.
3. f es un monomorfismo si y sólo si $r(F) = n$.
4. f es un epimorfismo si y sólo si $r(F) = m$.
5. f es un isomorfismo si y sólo si $m = n$ y F es regular.

Nuestro siguiente paso es estudiar la relación entre las distintas expresiones matriciales asociadas a una misma aplicación lineal $f : V \to V'$. Supondremos que $dim(V) = n$ y $dim(V') = m$. Sean B_1, B_2 bases de V y B_1', B_2' bases de V'.

Consideremos las ecuaciones de cambio de base de B_1 en B_2 y de B_1' en B_2' determinadas por las expresiones

$$x_{B_2} = P\, x_{B_1} \qquad y_{B_2'} = Q\, y_{B_1'}$$

con $P = M(B_1, B_2)$ y $Q = M(B_1', B_2')$. Asimismo escribimos las ecuaciones matriciales de f respecto de las bases B_1, B_1' y B_2, B_2'

$$y_{B_1'} = F\, x_{B_1} \qquad y_{B_2'} = G\, x_{B_2}$$

con $F = M(f, B_1, B_1')$, $G = M(f, B_2, B_2')$.

Obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$V \xrightarrow{f} V'$$

$$\begin{array}{ccc} x_{B_1} & \xrightarrow{F} & y_{B_1'} \\ P\downarrow & & \downarrow Q \\ x_{B_2} & \xrightarrow{G} & y_{B_2'} \end{array}$$

Se tiene entonces que la relación entre las expresiones matriciales F y G asociadas a f viene dada por la igualdad $F = Q^{-1}GP$ o, dicho de otro modo,

$$M(f, B_1, B_1') = M(B_1', B_2')^{-1} M(f, B_2, B_2') M(B_1, B_2)$$

Como $M(B_1', B_2')^{-1} = M(B_2', B_1')$, se puede escribir:

$$M(f, B_1, B_1') = M(B_2', B_1') M(f, B_2, B_2') M(B_1, B_2)$$

Definición 4. *(Equivalencia y semejanza de matrices)*

i) *Decimos que dos matrices* $F, G \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *son* equivalentes *si* $G = QFP$ *para* $Q \in M_m(\mathbb{K})$, $P \in M_n(\mathbb{K})$ *con* P, Q *regulares.*

ii) *Decimos que dos matrices cuadradas* $F, G \in M_n(\mathbb{K})$ *son* semejantes *si* $G = P^{-1}FP$ *para cierta* $P \in M_n(\mathbb{K})$ *regular.*

Proposición 1. *i)* *Dos matrices* $F, G \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *son equivalente si y sólo si son matrices asociadas a una misma aplicación lineal* $f : V \to V'$ *con respecto a bases distintas, esto es,* $F = M(f, B_1, B_1')$ *y* $G = M(f, B_2, B_2')$.

ii) *De igual modo se tiene que dos matrices* $F, G \in M_n(\mathbb{K})$ *son semejantes si y sólo si son matrices asociadas a un mismo endomorfismo* $f : V \to V$ *con respecto a bases distintas, esto es,* $F = M(f, B_1, B_1)$ *y* $G = M(f, B_2, B_2)$.

1.4. OPERACIONES CON APLICACIONES LINEALES

Definición 5. *(Operaciones con aplicaciones lineales)*

Sean V, V', V'' *tres* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales y sean* $f, g : V \to V'$ *y* $h : V' \to V''$ *tres aplicaciones lineales.*

i) *Definimos la aplicación suma* $f + g : V \to V'$ *como* $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ *para todo* $v \in V$.

ii) *Definimos la aplicación producto por un escalar* $a \in \mathbb{K}$, $af : V \to V'$, *como* $(af)(v) = af(v)$.

iii) *Definimos la aplicación composición* $h \circ f : V \to V''$ *como la aplicación* $(h \circ f)(v) = h(f(v))$ *para todo* $v \in V$.

Propiedades. Sean V, V', V'' tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita y sean B, B', B'' bases asociadas a cada uno de ellos. Consideremos las aplicaciones lineales $f, g : V \to V'$ y $h : V' \to V''$. Entonces se tiene que:

1. $f + g$ es lineal y $M(f + g, B, B') = M(f, B, B') + M(g, B, B')$.
2. Dado $a \in \mathbb{K}$, af es lineal y $M(af, B, B') = aM(f, B, B')$.
3. $h \circ f$ es lineal y $M(h \circ f, B, B'') = M(h, B', B'')M(f, B, B')$.

De las dos primeras propiedades se deduce que el conjunto de las aplicaciones lineales de V en V', denotado por $Hom(V, V')$, tiene estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial con las operaciones suma y producto por un escalar.

Teorema 2. *Dados dos* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales* V, V' *de dimensiones* n *y* m, *y dadas dos bases* B, B' *fijadas para cada uno de ellos, se tiene que existe un homomorfismo* M *entre los espacios vectoriales* $Hom(V, V')$ *y* $M_{m\times n}(\mathbb{K})$,

$$M : Hom(V, V') \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$$

que asocia a cada aplicación lineal $f \in Hom(V, V')$ *la matriz* $M(f, B, B')$*. Dicho homomorfismo es, de hecho, un isomorfismo lineal, cumpliéndose entonces que* $dim(Hom(V, V')) = dim(M_{m\times n}(\mathbb{K})) = mn$*.*