1. CÓNICAS

1.1. Cónicas. Estudio particular.

Una cónica se define como el lugar geométrico de los puntos del plano euclídeo que, respecto de una referencia cartesiana rectangular, satisfacen una ecuación del tipo:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y a_{11}, a_{22}, a_{12} no son los tres nulos.

La expresión polinómica de arriba se puede escribir, en forma matricial, del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

siendo A la matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

donde $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i \neq j$.

Los casos particulares más interesantes son los siguientes:

a) La **ecuación de una elipse en forma canónica** es

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

con $a, b > 0$. La matriz asociada será

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b^2 \end{pmatrix}$$

b) La **ecuación de una hipérbola en forma canónica** es

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

con $a, b > 0$. La matriz asociada será

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/b^2 \end{pmatrix}$$

c) La **ecuación de una parábola en forma canónica** es

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

con $p > 0$. La matriz asociada será

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -p & 0 \\ -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiemos cada uno de ellos por separado.

1.1.1. Elipse.

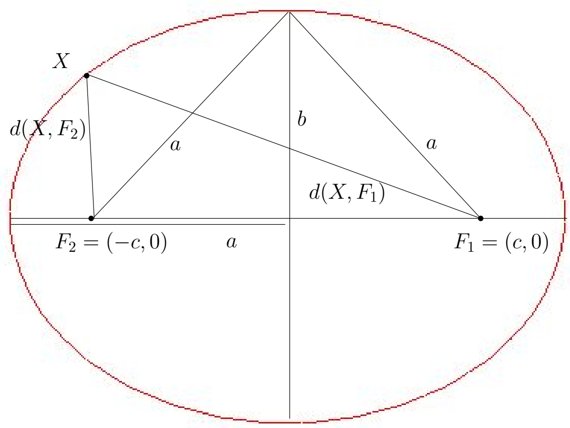
Dados dos puntos del plano euclídeo, F_1 y F_2, con distancia de uno a otro $d(F_1, F_2) = 2c$, se llama *elipse* de *focos* F_1 y F_2 y *semieje* $a > c$ al lugar geométrico formado por los puntos $X = (x, y)$ del plano tales que $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$.

La recta que contiene al segmento F_1F_2 y su mediatriz son los *ejes* de la elipse. La intersección de los ejes es el *centro de simetría* y los cuatro puntos de corte de los ejes con la elipse (dos por cada eje) son los *vértices*.

Si los focos tienen coordenadas $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$, no es difícil probar que la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

siendo $b^2 = a^2 - c^2$.



$$d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Los ejes coordenados son los ejes de la elipse.

Proposición 1.1. *Dado un punto X de una elipse, la recta tangente a la misma que pasa por X es bisectriz de las rectas R_{XF_1} y R_{XF_2} que unen X con F_1 y X con F_2 respectivamente.*

1.1.2. Hipérbola.

Dados dos puntos del plano euclídeo, F_1 y F_2, con distancia de uno a otro $d(F_1, F_2) = 2c$, se llama *hipérbola* de *focos* F_1 y F_2 y *semieje* $a > 0$ ($a < c$) al lugar geométrico formado por los puntos $X = (x, y)$ del plano tales que $|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a$.

La recta que contiene al segmento F_1F_2 y su mediatriz son los *ejes* de la hipérbola. La intersección de los ejes es el *centro de simetría* y los dos puntos de corte de la recta que contiene a F_1 y F_2 con la hipérbola son los *vértices.*

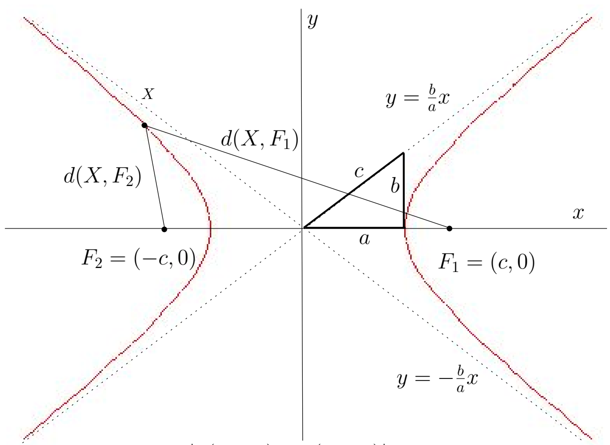
Si las coordenadas de los focos son $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $b^2 = c^2 - a^2 > 0$

Elementos importantes de las hipérbolas son sus asíntotas. La hipérbola de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene por asíntotas a las rectas

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$



$|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Proposición 1.2. *Dado un punto X de una hipérbola, la recta tangente a la misma que pasa por X es bisectriz de las rectas R_{XF_1} y R_{XF_2} que unen X con F_1 y X con F_2 respectivamente.*

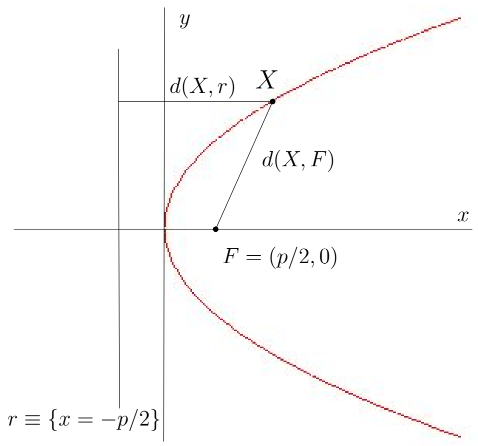
1.1.3. Parábola.

Es el lugar geométrico de los puntos $X = (x, y)$ del plano tales que equidistan de un punto, F, llamado *foco* de la parábola, y de una recta *directriz* r, situada a distancia $p > 0$ de F.

El *eje* de la parábola es la recta perpendicular a r y que pasa por F. El eje corta a la parábola en un punto al que se llama *vértice*.

Supondremos que $F = (p/2, 0)$ y que $r \equiv \{x = -p/2\}$. Entonces, resulta fácil probar que la ecuación de la parábola es

$$y^2 = 2px$$



Proposición 1.3. *Dado un punto X de una parábola, la recta tangente a la misma que pasa por X es bisectriz de la recta R_{XF}, que pasa por X y F, y la recta S, paralela al eje y que pasa por X.*

1.2. Secciones cónicas.

El nombre de *cónica* dado a elipse, hipérbola y parábola viene del hecho de que estas curvas se obtienen de la intersección de un plano con un cono. Por ejemplo, el cono $C \equiv \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ cortado con el plano $z = 1$ da lugar a la elipse $x^2 + y^2 = 1$ (es una circunferencia). El corte de C con el plano $y = 1$ da lugar a la curva $z^2 - x^2 = 1$, que es una hipérbola, y el corte de C con el plano $x+1=z$ da lugar a la curva $y^2 = 2x+1$, que es una parábola.

A la elipse, la hipérbola y la parábola se las suele llamar *cónicas no degeneradas* o *irreducibles*. No obstante, la intersección de un plano con un cono puede dar lugar también a otras situaciones:

i) $C \cap \{z=0\}$ da lugar a la ecuación $x^2+y^2=0$ (un punto).

ii) $C \cap \{x=0\}$ proporciona la ecuación

$$y^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow (y-z)(y+z) = 0,$$

que se corresponde con dos rectas que se cortan.

iii) $C \cap \{x=z\}$ da lugar a $y^2=0$, que es una recta (recta doble).

Todas estas cónicas se denominan *cónicas degeneradas*.

1.3. Ecuación reducida de una cónica.

Sea la cónica que, respecto de un sistema de referencia rectangular fijo, $\mathcal{R} = \{O, u_1, u_2\}$, tiene coordenadas x, y con expresión polinómica:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0 \tag{1}$$

y expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ó} \quad X^t A X = 0 \tag{2}$$

donde $X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ y A es la matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & \bar{a}^t \\ \bar{a} & A_0 \end{pmatrix}$$

con $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i \neq j$, $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix}$ y $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

La matriz A_0 representa los coeficientes de los términos cuadráticos del polinomio, la columna $\bar{a}$ representa los coeficientes de la parte lineal y a_{00} es el término constante.

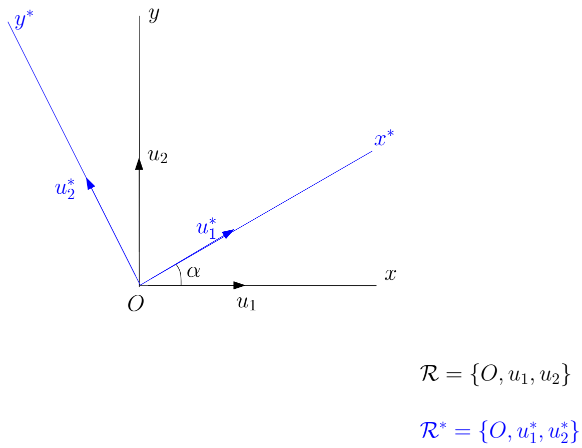
Haremos un cambio de coordenadas rectangulares (un giro compuesto con una traslación de ejes) de modo que la ecuación polinómica (1) sea lo más sencilla posible.

Paso 1. Giro de ejes. La matriz asociada a un giro de ángulo α es

$$\phi = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

La nueva referencia rectangular obtenida tras el giro es $\mathcal{R}^* = \{O, u_1^*, u_2^*\}$ con coordenadas x^*, y^*, esto es,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$$



o, de modo equivalente,

$$X = GX^*$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad X^* = \begin{pmatrix} 1 \\ x^* \\ y^* \end{pmatrix} \text{ y } G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Escribiremos $G = \begin{pmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \bar{0} & \phi \end{pmatrix}$.

Dado que nuestro objetivo es simplificar (1), esto se conseguirá diagonalizando la matriz A_0 que aparece en (2) mediante la transformación ortogonal que representa el giro. Elegimos ϕ de modo que

$$\phi^{-1}A_0\phi = \phi^t A_0 \phi = D$$

siendo D una matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal principal son los autovalores (todos reales) de la matriz simétrica A_0. Recordemos que las columnas de ϕ son las coordenadas de los vectores de una base de autovectores (unitarios) de A_0 asociados a los respectivos autovalores, cumpliéndose $|\phi| = 1$.

Veamos cuál es la expresión matricial de la cónica respecto de la referencia $\mathcal{R}^*$:

$$X^t AX = (GX^*)^t A(GX^*) = X^{*t} G^t AGX^* = X^{*t} A^* X^*$$

donde

$$A^* = G^t AG = \begin{pmatrix} a_{00} & \bar{a}^t\phi \\ \phi^t\bar{a} & \phi^t A_0 \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^*_{00} & \bar{a}^{*t} \\ \bar{a}^* & A^*_0 \end{pmatrix}$$

con $A^*_0 = D = \begin{pmatrix} a^*_{11} & 0 \\ 0 & a^*_{22} \end{pmatrix}$.

De este modo, la ecuación matricial (2) pasa a ser de la forma

$$X^{*t} A^* X^* = 0 \tag{3}$$

La ecuación de la cónica respecto de la referencia $\mathcal{R}^*$, (3), es más sencilla que (2) (A^*_0 es diagonal).

Obsérvese que al realizar el giro, desaparecen los términos cuadráticos cruzados x^*y^* en el polinomio de la cónica respecto de la nueva referencia $\mathcal{R}^*$.

Queda por hacer una traslación de los ejes de $\mathcal{R}^*$.

Paso 2. Traslación de ejes. Una traslación de ejes simplificará aún más la expresión (3). Denotamos a la nueva referencia rectangular después de la traslación como $\mathcal{R}^{**} = \{O^{**}, u^{**}_1, u^{**}_2\}$ y denotamos por x^{**}, y^{**} a las nuevas coordenadas.

La matriz de la traslación será

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \bar{t}^* & I \end{pmatrix}$$

con $\bar{t}^* = \begin{pmatrix} t^*_1 \\ t^*_2 \end{pmatrix}$ las coordenadas de O^{**} respecto de $\mathcal{R}^*$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se tiene

$$X^* = TX^{**}$$

siendo $X^{**} = \begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix}$

Entonces,

$$X^{*t}A^{*}X^{*} = (TX^{**})^{t}A^{*}(TX^{**}) = X^{**t}T^{t}A^{*}TX^{**} = X^{**t}A^{**}X^{**}$$

con $A^{**} = T^{t}A^{*}T = (GT)^{t}A(GT)$. La ecuación matricial (3) pasa a ser de la forma

$$X^{**t}A^{**}X^{**} = 0 \qquad (4)$$

Se prueba fácilmente que la matriz A^{**} tiene la forma

$$A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00} + 2\bar{a}^{t}\bar{t} + \bar{t}^{t}A_{0}\bar{t} & (\bar{a} + A_{0}\bar{t})^{t}\phi \\ \phi^{t}(\bar{a} + A_{0}\bar{t}) & \phi^{t}A_{0}\phi \end{pmatrix}$$

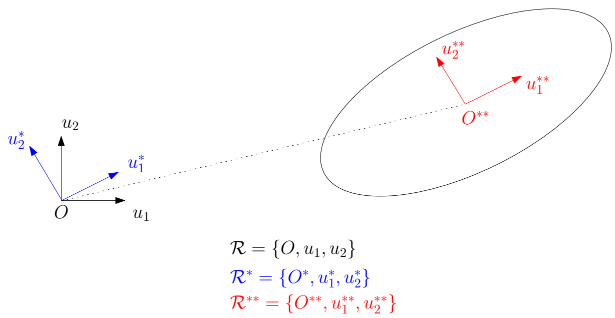
con $\bar{t} = \phi\bar{t}^{*}$ ($\bar{t}$ y $\bar{t}^{*}$ son las coordenadas de O^{**} respecto de las referencias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^{*}$).

Ya sabemos que la parte cuadrática asociada a A^{**}

$$A_{0}^{**} = \phi^{t}A_{0}\phi = \begin{pmatrix} a_{11}^{*} & 0 \\ 0 & a_{22}^{*} \end{pmatrix},$$

es diagonal, y su diagonal principal está formada por los autovalores de A_{0}. Ahora se busca que la parte lineal asociada a A^{**} sea lo más sencilla posible (si puede ser, nula) para simplificar la ecuación (4). Interesa elegir $\bar{t}$ para que $\phi^{t}(\bar{a} + A_{0}\bar{t}) = \bar{0}$. De ese modo, A^{**} sería diagonal. La condición a imponer en la traslación es, pues,

$$\bar{a} + A_{0}\bar{t} = \bar{0} \qquad (5)$$



No siempre será posible encontrar un $\bar{t}$ solución única de este sistema lineal. De haberlo, esas serán las coordenadas, respecto de $\mathcal{R}$, del *centro de* *la cónica*. Si el sistema es compatible indeterminado, la cónica tendrá infinitos centros y, si es incompatible, la cónica no tendrá centro (caso de la parábola).

Tendremos tres situaciones posibles para la matriz A^{**} en función de que exista uno, ninguno o infinitos centros:

i) En caso de que la cónica tenga centro único, esto es, si $|A_0| = |A_0^*| \neq 0$ o, en otras palabras, si los dos autovalores de A_0 son no nulos, entonces el sistema (5) es compatible determinado. En este caso, tras la traslación, desaparecen los términos en x^* e y^* obteniéndose la *matriz reducida*

$$\boxed{A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} \end{pmatrix}} \tag{6}$$

que da lugar a la *ecuación reducida*, respecto de $\mathcal{R}^{**}$,

$$a_{11}^{**} x^{**2} + a_{22}^{**} y^{**2} + a_{00}^{**} = 0$$

En función de los signos de los coeficientes, los distintos casos posibles son: elipse real, elipse imaginaria (conjunto vacío), hipérbola, un punto (dos rectas imaginarias que se cortan en dicho punto) o dos rectas reales que se cortan.

ii) Si alguno de los autovalores de A_0 es nulo y $|A| \neq 0$, no se anulan los dos términos lineales x^* e y^*. Ese es el caso de la parábola, para la que el sistema (5) es incompatible. La matriz reducida resultante para la parábola es del tipo

$$\boxed{A^{**} = \begin{pmatrix} 0 & a_{01}^{**} & \\ a_{10}^{**} & 0 & \\ & & a_{22}^{**} \end{pmatrix}} \tag{7}$$

iii) Si alguno de los autovalores de A_0 es nulo y $|A| = 0$, la matriz A^{**} es

$$\boxed{A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & & \\ & 0 & \\ & & a_{22}^{**} \end{pmatrix}} \tag{8}$$

donde 0 y a_{22}^{**} son los autovalores de A_0 y a_{00}^{**} puede tomar cualquier valor real. En función del signo de ese valor, tendremos una recta doble, dos rectas paralelas reales o dos rectas paralelas imaginarias.

1.4. Invariantes métricos de las cónicas.

Proposición 1.4. Invariantes métricos de las cónicas. *Las transformaciones rectangulares de coordenadas (giros y traslaciones) no modifican* $|A|, |A_0|$ *ni* $tr(A_0)$. *En particular:*

$$|A| = |A^*| = |A^{**}|, \quad |A_0| = |A_0^*| = |A_0^{**}|, \quad tr(A_0) = tr(A_0^*) = tr(A_0^{**})$$

Demostración. Dado que $|T| = |G| = 1$,

$$|A^{**}| = |T^t A^* T| = |A^*| = |G^t A G| = |A|$$

Por otro lado, como $A_0^{**} = A_0^* = \phi^t A_0 \phi = \phi^{-1} A_0 \phi$, podemos afirmar que las matrices $A_0^{**} = A_0^*$ y A_0 son semejantes y, por tanto, tienen el mismo polinomio característico $\lambda^2 - a_1\lambda + a_2$. Como en el polinomio característico a_1 es la traza y a_2 el determinante de la matriz, queda probado que

$$|A_0^{**}| = |A_0^*| = |A_0| \quad \text{y} \quad tr(A_0^{**}) = tr(A_0^*) = tr(A_0)$$

□

1.4.1. Coeficientes de la ecuación reducida en función de los invariantes.

i) En las cónicas con centro único (con $|A_0| \neq 0$), los coeficientes de las ecuaciones reducidas son

$$\boxed{a_{00}^{**} = \frac{|A^{**}|}{|A_0^{**}|} = \frac{|A|}{|A_0|}}$$

Por otro lado,

$$\boxed{a_{11}^{**} \text{ y } a_{22}^{**} \text{ son las raíces de } p(\lambda)\text{, el polinomio característico de } A_0}$$

siendo $p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A_0)\lambda + det(A_0)$.

ii) En las parábolas (cónicas con vértice), resulta

$$\boxed{a_{22}^{**} = tr(A_0^{**}) = tr(A_0)}$$

y $|A^{**}| = -a_{22}^{**}\, a_{10}^{**2} = |A|$, de modo que

$$\boxed{a_{10}^{**} = \pm\sqrt{\frac{-|A|}{tr(A_0)}}}$$

iii) En el resto de casos (rectas paralelas, ya sean reales o imaginarias, y recta doble),

$$\boxed{0 \text{ y } a_{22}^{**} \text{ son los autovalores de } A_0}$$

mientras que

$$\boxed{a_{00}^{**} = \frac{A_{11}^{**}+A_{22}^{**}}{a_{22}^{**}} = \frac{A_{11}+A_{22}}{tr(A_0)}}$$

siendo A_{ii} el adjunto de a_{ii} en A.

1.4.2. Clasificación de las cónicas en función de los invariantes.

En el siguiente esquema encontramos una clasificación de las cónicas en función de los invariantes estudiados:

Caso 1. $|A| \neq 0$.

1.1. Si $|A_0| \neq 0$ (cónica con centro único), puede ocurrir:

1.1.a) $|A_0| > 0$ y $sig(|A|) = sig(tr(A_0))$. Elipse imaginaria.

1.1.b) $|A_0| > 0$ y $sig(|A|) \neq sig(tr(A_0))$. Elipse real.

1.1.c) $|A_0| < 0$. Hipérbola

1.2. Si $|A_0| = 0$. Parábola.

Caso 2. $|A| = 0$.

2.1 Si $A_0 \neq 0$ (rectas no paralelas), puede ocurrir:

2.1.a) $|A_0| > 0$ par de rectas imaginarias (un punto).

2.1.b) $|A_0| < 0$ par de rectas reales.

2.2 Si $|A_0| = 0$ (rectas paralelas), puede ocurrir:

2.2.a) $A_{11} + A_{22} > 0$ par de rectas imaginarias distintas.

2.2.b) $A_{11} + A_{22} < 0$ par de rectas reales distintas.

2.2.c) $A_{11} + A_{22} = 0$ recta doble.

Ejemplo 1. Clasificar y obtener la ecuación reducida de la cónica

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$$

Resulta

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = 7$, $|A_0| = 3$ y $tr(A_0) = 4$, tenemos una elipse imaginaria. Calculemos la ecuación reducida. La matriz asociada a dicha ecuación será la matriz diagonal:

$$A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & & \\ & a_{11}^{**} & \\ & & a_{22}^{**} \end{pmatrix}$$

Los valores a_{11}^{**} y a_{22}^{**} son los autovalores de A_0. Calculémoslos:

$$p(\lambda) = det(A_0 - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

Se tiene $a_{11}^{**} = 1$ y $a_{22}^{**} = 3$. Además, $a_{00}^{**} = \frac{|A|}{|A_0|} = \frac{7}{3}$
La matriz A^{**} es

$$A^{**} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

y la ecuación reducida será $x^{**2} + 3y^{**2} = \frac{-7}{3}$.

Ejemplo 2. Clasificar y encontrar la ecuación reducida de la cónica $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene $|A| = -1$ y $|A_0| = 0$, de modo que la cónica es una parábola. Calculemos la ecuación reducida. Téngase en cuenta que la matriz asociada en el caso de la parábola es

$$A^{**} = \begin{pmatrix} 0 & a_{01}^{**} & 0 \\ a_{01}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A_0 es $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$, de modo que los autovalores son 0 y 2. Por tanto, $a_{22}^{**} = 2$ (el autovalor no nulo). Únicamente queda por saber el valor de $a_{01}^{**} = \pm\sqrt{\frac{-|A|}{tr(A_0)}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. La ecuación reducida se obtiene a partir de la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & x^{**} & y^{**} \end{pmatrix} A^{**} \begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = 0,$$

esto es,

$$-\frac{2}{\sqrt{2}}x^{**} + 2y^{**2} = 0 \qquad \text{ó} \qquad y^{**2} = \frac{1}{\sqrt{2}}x^{**}$$

1.5. Cálculo de los elementos de una cónica.

- **Centro y ejes de cónicas con centro.** Si la cónica tiene centro (o centros), éste se obtiene resolviendo el sistema lineal (5), $\bar{a} + A_0\bar{t} = \bar{0}$. Los ejes se obtienen a partir de los autovectores asociados a los autovalores de A_0 (las columnas de ϕ) apoyados en el centro. Obsérvese que, en el caso de la hipérbola, el eje que no la corta es aquel obtenido del autovector asociado al autovalor de signo negativo.

  Ejemplo 3. Dada la cónica $x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$, se pide su clasificación, ecuación reducida y los elementos característicos de la misma.

  Resulta

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

  Como $|A| = -1$ y $|A_0| = -2$, tenemos una hipérbola. Calculemos el centro. Basta resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

  Resulta $\bar{c} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$.

  Hallemos la ecuación reducida. Para ello debemos obtener la matriz diagonal

$$A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & & \\ & a_{11}^{**} & \\ & & a_{22}^{**} \end{pmatrix}$$

Los valores a_{11}^{**} y a_{22}^{**} son los autovalores de A_0. Calculémoslos:

$$p(\lambda) = det(A_0 - \lambda I) = (\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})$$

Se tiene $a_{11}^{**} = \sqrt{2}$ y $a_{22}^{**} = -\sqrt{2}$. Además, $a_{00}^{**} = \frac{|A|}{|A_0|} = \frac{1}{2}$

La matriz A^{**} es

$$A^{**} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & \sqrt{2} & \\ & & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y la ecuación reducida será $\sqrt{2}x^{**2} - \sqrt{2}y^{**2} = \frac{-1}{2}$. Se puede escribir, de modo equivalente,

$$-\frac{x^{**2}}{\left(\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)^2} + \frac{y^{**2}}{\left(\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)^2} = 1$$

Los ejes vienen determinados por los autovectores asociados a los autovalores. Debemos calcular los subespacios propios $V_{\sqrt{2}}$ y $V_{-\sqrt{2}}$. Tras echar cuentas, resultan $V_{\sqrt{2}} = L\{(1+\sqrt{2}, 1)\}$ y $V_{-\sqrt{2}} = L\{(1-\sqrt{2}, 1)\}$ (bastaría con calcular uno de los subespacios propios ya que sabemos que el otro será perpendicular). Dado que en A_0^{**} hemos elegido como primer autovalor $\lambda = \sqrt{2}$ y como segundo autovalor $\lambda = -\sqrt{2}$, la primera columna de ϕ será $(1+\sqrt{2}, 1)$ dividido por su norma y la segunda columna de ϕ será $(1-\sqrt{2}, 1)$ dividido por su norma. Los ejes serán

Eje X^{**}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eje Y^{**}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4. Clasificar y obtener la ecuación reducida y los elementos característicos de la cónica:

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$$

Resulta

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = -11$, $|A_0| = 3$ y $tr(A_0) = 4$, tenemos una elipse real. Calculemos la ecuación reducida. La matriz asociada a dicha ecuación será la matriz diagonal:

$$A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & & \\ & a_{11}^{**} & \\ & & a_{22}^{**} \end{pmatrix}$$

Los valores a_{11}^{**} y a_{22}^{**} son los autovalores de A_0. Calculémoslos:

$$p(\lambda) = det(A_0 - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

Se tiene $a_{11}^{**} = 1$ y $a_{22}^{**} = 3$. Además, $a_{00}^{**} = \frac{|A|}{|A_0|} = \frac{-11}{3}$
La matriz A^{**} es

$$A^{**} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{3} & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

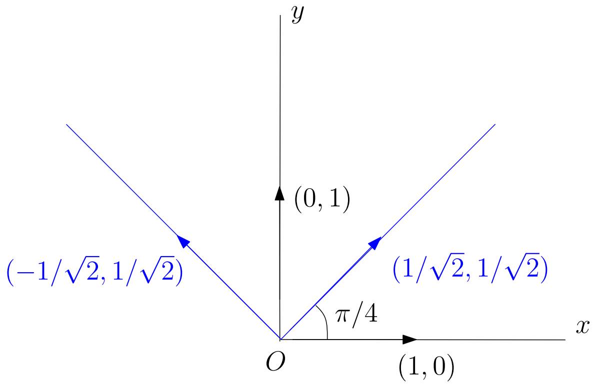
y la ecuación reducida será

$$x^{**2} + 3y^{**2} = 11/3 \qquad \text{ó} \qquad \frac{x^{**2}}{(\sqrt{11/3})^2} + \frac{y^{**2}}{(\sqrt{11/9})^2} = 1$$

Las columnas de la matriz del giro ϕ se obtienen a partir de una base ortogonal de autovectores unitarios asociados a los autovalores de A_0. Los subespacios propios asociados son $V_1 = L\{(1,1)\}$ y $V_3 = L\{(-1,1)\}$. Por tanto,

$$\phi = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Se tiene el ángulo $\alpha = \arccos\left(1/\sqrt{2}\right) = \pi/4$.



El centro de la cónica es la solución $\bar{c} = (1/3, -1/3)$ del sistema

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \bar{c} = \bar{0}$$

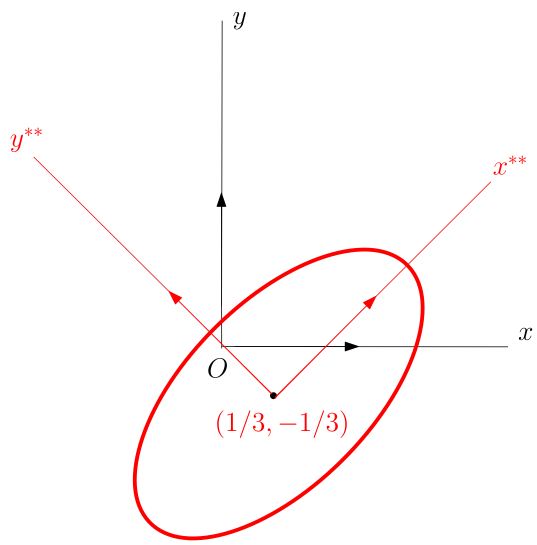
Los ejes se obtienen a partir de los autovectores asociados a los autovalores $\lambda = 1$ y $\lambda = 3$, resultando:

Eje X^{**}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eje Y^{**}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Calculemos los vértices. La ecuación reducida indica que $a = \sqrt{11/3}$ y $b = \sqrt{11/9}$. Además, $\bar{c} = (1/3, -1/3)$ y

$$\phi = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

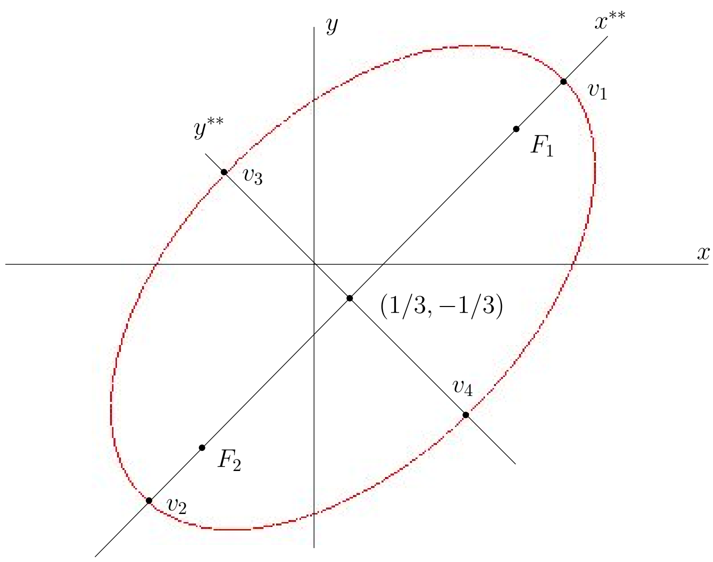
Llegamos a la conclusión de que los vértices son

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} + \sqrt{11/3}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ v_2 &= \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} - \sqrt{11/3}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ v_3 &= \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} + \sqrt{11/9}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ v_4 &= \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} - \sqrt{11/9}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $c = \sqrt{11/3 - 11/9} = \frac{\sqrt{22}}{3}$, los focos son

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{22}}{3}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{22}}{3} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



- **Vértice y ejes de la parábola.** Si la cónica tiene vértice (parábola), el eje de la misma se obtiene apoyando en el vértice el autovector asociado al autovalor 0 (la columna de ϕ correspondiente a $\lambda = 0$). El otro eje (secundario) se obtiene apoyando en el vértice el autovector dado por la otra columna de ϕ. Para obtener el vértice, se corta la familia de rectas paralelas al eje secundario con la cónica. La recta que corte exactamente en un punto a la cónica será dicho eje, y el punto de intersección será el vértice.

  Ejemplo 5. Dada la parábola $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$ del ejemplo 2, se piden sus elementos característicos.

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  Se tiene $|A| = -1$ y $|A_0| = 0$.

  El polinomio característico de A_0 es $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$, de modo que los autovalores son 0 y 2. El vector propio asociado al autovalor 0 nos da la dirección del eje de la parábola.

$$V_0 = \{\bar{x} : A_0\,\bar{x} = \bar{0}\} = \{(x,y) : x - y = 0\} = L\{(1,1)\}$$

Como V_2 es perpendicular a V_0 (la matriz A_0 es simétrica), es claro que $V_2 = L\{(-1,1)\}$. Si se hacen las cuentas,

$$V_2 = \{\bar{x} : (A_0 - 2I)\,\bar{x} = \bar{0}\} = \{(x,y) : x + y = 0\} = L\{(-1,1)\}$$

La matriz ϕ asociada al giro será

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

El eje de la parábola tendrá la dirección del vector $(1,1)$. Obsérvese que las rectas de la forma $x+y=n$ son perpendiculares a dicho vector. Estamos interesados en encontrar, de entre todas estas rectas, aquella que corta a la párabola en un único punto, que será el vértice. El resto de rectas cortará a la parábola en dos puntos o en ninguno (puntos imaginarios).

Despejamos $y = n - x$ (podríamos despejar $x = n - y$ también) y sustituímos en la ecuación de la cónica para obtener la intersección, quedando

$$x^2 - 2x(-x+n) + (-x+n)^2 + 4x - 6(-x+n) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 + (-4n+10)x + (n^2 - 6n + 1) = 0$$

De modo que

$$x = \frac{(4n-10) \pm \sqrt{(-4n+10)^2 - 16(n^2-6n+1)}}{8}$$

Dado que la intersección de la recta y la cónica debe ser un único punto (el vértice), tendremos que buscar el valor de la n que hace que la x obtenida sea única, esto es, buscamos n tal que $(-4n+10)^2 - 16(n^2 - 6n+1) = 0$. Resolviendo, resulta $n = \frac{-21}{4}$, de modo que la coordenada x del vértice es $x = \frac{-31}{8}$. La coordenada y se obtiene sustituyendo el valor de n y el de x en la ecuación de la recta, quedando $y = \frac{31}{8} - \frac{21}{4} = -\frac{11}{8}$. El vértice $\bar{v}$ es, por tanto, el punto de coordenadas

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} -31/8 \\ -11/8 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la recta $x+y=-21/4$ contiene al vértice y es tangente en él a la parábola. Las rectas $x+y=k$ con $k<-21/4$ no se cortan con la parábola y las rectas $x+y=k$ con $k>-21/4$ se cortan en dos puntos con la parábola.

Los ejes ya están determinados.

El eje X^{**} (eje de la parábola) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31/8 \\ -11/8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El eje Y^{**} (tangente a la parábola en el vértice) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31/8 \\ -11/8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

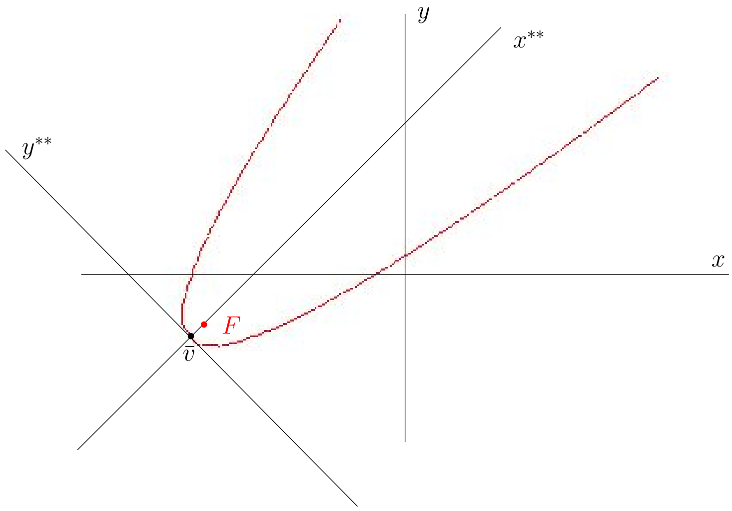
Dado que la ecuación reducida es

$$-\frac{2}{\sqrt{2}}x^{**} + 2y^{**2} = 0 \qquad \text{ó} \qquad y^{**2} = \frac{1}{\sqrt{2}}x^{**}$$

tenemos $y^{**2} = 2px^{**}$ con $p = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Como la parábola se encuentra en el semiplano $x+y \geq -21/4$ y el foco está en el mismo semiplano, éste será el punto

$$F = \begin{pmatrix} -31/8 \\ -11/8 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15/4 \\ -5/4 \end{pmatrix}$$



- **Asíntotas de la hipérbola.** Si la hipérbola tiene centro (c_1, c_2), la ecuación de las asíntotas será del tipo $y - c_2 = m(x - c_1)$ para dos valores de m que se obtienen de resolver la ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

Esta ecuación proporciona las pendientes de las dos asíntotas buscadas.

Ejemplo 6. Obtener los vértices, los focos y las asíntotas de la hipérbola del ejemplo 3.

Teníamos

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Las asíntotas son rectas que pasan por el centro $\bar{c} = (1/2, 5/2)$ y tienen pendiente m, que se obtiene resolviendo la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

Desarrollando, queda $-m^2 + 2m + 1 = 0$, con lo que $m = 1 \pm \sqrt{2}$. Por consiguiente, las asíntotas son

$$y - 5/2 = (1 + \sqrt{2})(x - 1/2)$$

e

$$y - 5/2 = (1 - \sqrt{2})(x - 1/2)$$

Calculemos los vértices. Dado que

$$A^{**} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & \sqrt{2} & \\ & & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

la ecuación reducida es $-\sqrt{2}x^{**2} + \sqrt{2}y^{**2} = \frac{1}{2}$ ó

$$-\frac{x^{**2}}{\left(\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)^2} + \frac{y^{**2}}{\left(\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)^2} = 1$$

La hipérbola se corta con el eje Y^{**}, donde están los vértices y los focos. Se tiene $a = b = 2^{-3/4}$ y $c = 2^{-1/4}$. Como los subespacios propios son

$$V_{\sqrt{2}} = L\{(1 + \sqrt{2}, 1)\} \quad \text{y} \quad V_{-\sqrt{2}} = L\{(1 - \sqrt{2}, 1)\},$$

resulta:

Eje X^{**}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eje Y^{**}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz del giro será

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, los vértices son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} + 2^{-3/4} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} - 2^{-3/4} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

Los focos son

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} + 2^{-1/4} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} - 2^{-1/4} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$