1. CUÁDRICAS

1.1. Cuádricas. Estudio particular.

Una cuádrica se define como el lugar geométrico de los puntos del espacio euclídeo que, respecto de una referencia cartesiana rectangular, satisfacen una ecuación del tipo:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{01}x+2a_{02}y+2a_{03}z+a_{00}=0$$

donde $a_{ij}\in\mathbb{R}$ y $a_{11},a_{22},a_{33},a_{12},a_{13},a_{23}$ no son todos nulos.

La expresión polinómica de arriba se puede escribir, en forma matricial, del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

siendo A la matriz simétrica:

$$A=\left(\begin{array}{c|ccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ \hline a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

donde $a_{ij}=a_{ji}$ para todo $i\neq j$.

A continuación estudiamos los casos particulares más interesantes.

1.1.1. Elipsoide real.

La **ecuación en forma canónica de un elipsoide real** es

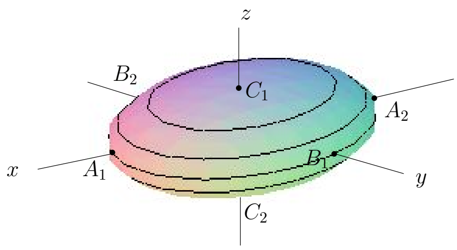
$$\boxed{\tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2}+\tfrac{z^2}{c^2}=1}$$

con $a,b,c>0$. La matriz asociada será

$$A=\left(\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/c^2 \end{array}\right)$$

Dados los puntos $A_1=(a,0,0),A_2=(-a,0,0),B_1=(0,b,0),B_2=(0,-b,0),C_1=(0,0,c)$ y $C_2=(0,0,-c)$, se consideran las elipses e_{xy},e_{xz}

y e_{yz} contenidas, respectivamente, en los planos $\{z=0\},\{y=0\}$ y $\{x=0\}$ y cuyos vértices son los puntos especificados arriba y contenidos en el plano correspondiente. El elipsoide que tiene por *vértices* $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ es el lugar geométrico de los puntos del espacio que se obtienen como la unión de la familia de elipses, perpendiculares al eje z, y que tienen sus vértices en las elipses e_{xz} y e_{yz}. Los *ejes* del elipsoide son las tres rectas que contienen a los pares de vértices. El origen de coordenadas es el *centro* de este elipsoide.



Observación 1.1. *Obsérvese que, si $a=b$, el elipsoide es una superficie de revolución que se obtiene haciendo girar la elipse e_{xz} ó la e_{yz} alrededor del eje z. Si, además, $a=b=c$, el elipsoide es una esfera de radio a.*

Las trazas del elipsoide en planos paralelos al plano $z=0$ ($y=0$, $x=0$) dan elipses, salvo para $z=c$ ($y=b$, $x=a$), donde obtenemos un punto, y $z>c$ ($y>b$, $x>a$) donde la intersección es vacía.

1.1.2. Hiperboloide de una hoja o hiperbólico.

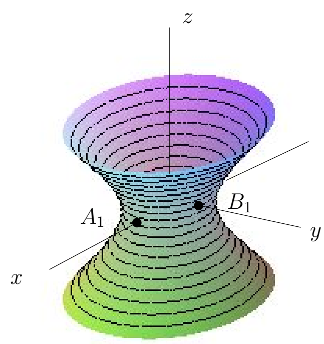
La **ecuación de un hiperboloide de una hoja en forma canónica** es

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

con $a,b,c>0$. La matriz asociada será

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/c^2 \end{pmatrix}$$

Dados los puntos $A_1=(a,0,0), A_2=(-a,0,0), B_1=(0,b,0), B_2=(0,-b,0)$, se considera la elipse de vértices A_1, A_2, B_1, B_2 y ejes las dos rectas que contienen a los dos pares de puntos. Consideramos también las hipérbolas de ecuaciones $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$ y $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ (con $c > 0$) contenidas, respectivamente, en los planos $y = 0$ y $x = 0$. El hiperboloide de una hoja que tiene por *ejes* los ejes coordenados y *vértices* A_1, A_2, B_1, B_2 es el lugar geométrico de los puntos del espacio que se obtienen como la unión de la familia de elipses, perpendiculares al eje z (eje principal), y que tienen sus vértices en las hipérbolas descritas. El origen de coordenadas es el *centro* de este hiperboloide.

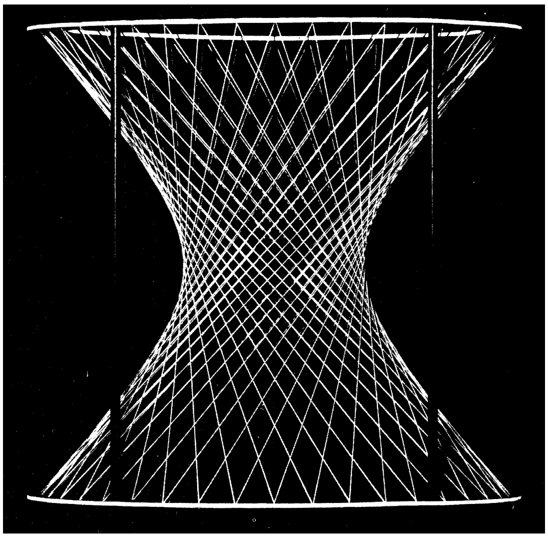


Observación 1.2. *Obsérvese que, si $a = b$, el hiperboloide de una hoja es una* superficie de revolución*, obtenida al hacer girar cualquiera de las dos hipérbolas alrededor del eje z.*

Obsérvese también que el eje principal se corresponde con la variable cuyo coeficiente es de signo distinto a las otras dos en la ecuación reducida.

Las trazas del hiperboloide en planos paralelos a $z = 0$ da lugar a elipses. Las trazas en planos paralelos a $x = 0$ ($y = 0$) dan lugar a hipérbolas si $|x| \neq a$ ($|y| \neq b$) y a un par de rectas que se cortan si $|x| = a$ ($|y| = b$).

Proposición 1.1. *El hiperboloide de una hoja es una cuádrica reglada, esto es, está engendrada por rectas.*



1.1.3. Hiperboloide de dos hojas o elíptico.

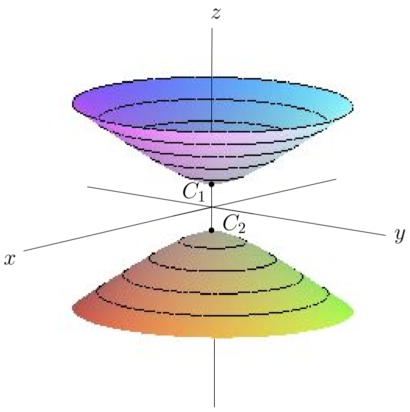
La **ecuación de un hiperboloide de dos hojas en forma canónica** es

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

con $a, b, c > 0$. La matriz asociada será

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/c^2 \end{pmatrix}$$

Sean $a, b, c > 0$ y $C_1 = (0, 0, c), C_2 = (0, 0, -c)$. Se consideran las hipérbolas que tienen por ecuaciones $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ y $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ y que están contenidas, respectivamente, en los planos $x = 0$ e $y = 0$. El lugar geométrico de los puntos del espacio que se obtienen como la unión de la familia de elipses, perpendiculares al eje z, y que tienen sus vértices en las hipérbolas descritas es un *hiperboloide de dos hojas* que tiene por *ejes* los ejes coordenados. El eje principal es el eje z, que contiene a los *vértices* C_1 y C_2. El origen de coordenadas es el *centro* de este hiperboloide.



Observación 1.3. *Obsérvese que, si $a = b$, el hiperboloide es una* superficie de revolución, *obtenida al hacer girar cualquiera de las dos hipérbolas alrededor del eje z.*

Obsérvese también que, dada una hipérbola contenida en el espacio, y dados sus dos ejes de simetría, si la hacemos girar en torno a uno de ellos obtendremos un hiperboloide de una hoja (de revolución) y si la hacemos girar en torno al otro eje, obtendremos un hiperboloide de dos hojas (de revolución).

El eje principal se corresponde con la variable cuyo coeficiente es de signo distinto al de las otras dos en la ecuación reducida.

Las trazas del hiperboloide en planos paralelos a $z = 0$ dan lugar a elipses si $|z| > c$, a puntos si $|z| = c$ y al conjunto vacío si $|z| < c$. Las trazas en planos paralelos a $x = 0$ ó $y = 0$ dan lugar a hipérbolas.

1.1.4. Cono elíptico.

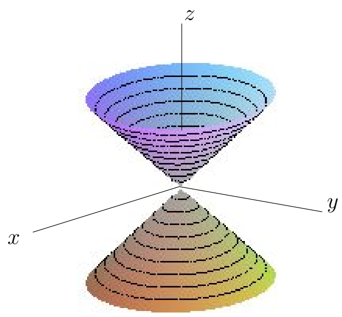
La **ecuación de un cono elíptico en forma canónica** es

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}$$

con $a, b, c > 0$. La matriz asociada será

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/c^2 \end{pmatrix}$$

Dado el par de rectas contenidas en el plano $x = 0$ y que se cortan en el origen, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, y dado el par de rectas contenidas en el plano $y = 0$ y que se cortan en el origen, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, con $a, b, c > 0$, se llama *cono elíptico* al lugar geométrico de los puntos del espacio que se obtienen como unnión de las elipses perpendiculares al eje z y que tienen sus vértices en las rectas descritas.



Observación 1.4. *Obsérvese que, si $a = b$, las elipses pasan a ser circunferencias y el cono se convierte en una superficie de revolución obtenida al hacer girar cualquiera de las cuatro rectas alrededor del eje z.*

Las trazas del cono en los planos paralelos al plano $z = 0$ son elipses, salvo para $z = 0$, que da un punto. Las trazas del cono en los planos paralelos a los planos $x = 0$ e $y = 0$ son hipérbolas, salvo en $x = 0$ e $y = 0$, donde se obtienen un par de rectas que se cortan.

Proposición 1.2. *El cono es una superficie reglada, esto es, está engendrada por rectas.*

1.1.5. Paraboloide elíptico.

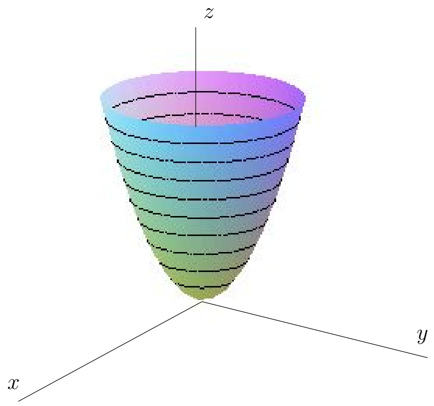
La **ecuación de un paraboloide elíptico en forma canónica** es

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z}$$

con $a, b > 0$. La matriz asociada será

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b^2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dadas las parábolas $x^2 = 2pz$ e $y^2 = 2qz$ contenidas en los planos $y = 0$ y $x = 0$ respectivamente, el *paraboloide elíptico* engendrado por dichas parábolas es el lugar geométrico de las elipses perpendiculares al eje z y que tienen sus vértices en los puntos de las parábolas dadas. El paraboloide elíptico carece de centro y su *vértice* es la intersección de las dos parábolas dadas. Los ejes son los ejes coordenados, siendo el eje principal el eje z.



Observación 1.5. *Obsérvese que, si $a = b$, las elipses pasan a ser circunferencias y el paraboloide elíptico se convierte en una superficie de revolución obtenida al hacer girar cualquiera de las dos parábolas alrededor del eje z.*

Las trazas del paraboloide elíptico en los planos paralelos al plano $z = 0$ son elipses, salvo para $z = 0$, que da un punto, y para $z < 0$, que da el conjunto vacío. Las trazas del paraboloide en los planos paralelos a los planos $x = 0$ e $y = 0$ son parábolas.

1.1.6. Paraboloide hiperbólico.

La **ecuación de un paraboloide hiperbólico en forma canónica** es

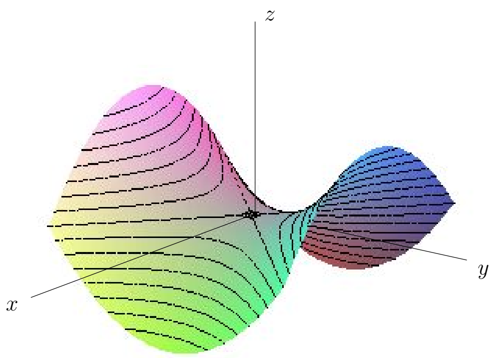
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z}$$

con $a, b > 0$. La matriz asociada será

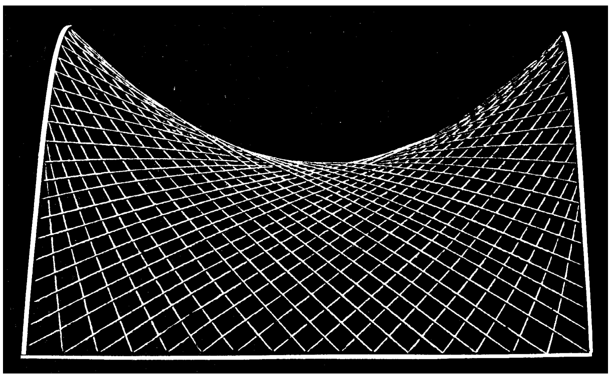
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/b^2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos, en el espacio euclídeo, las parábolas de ecuación reducida $x^2 = a^2 z$ e $y^2 = -b^2 z$ con $a, b > 0$ y contenidas, respectivamente, en los planos $y = 0$ y $x = 0$. El *paraboloide hiperbólico* generado por estas parábolas es el lugar geométrico constituido por las parábolas paralelas a una de ellas y cuyos vértices recorren la otra. El paraboloide hiperbólico no tiene centro y su *vértice* es la intersección de las dos parábolas generadoras. Los ejes, en este caso, son los ejes coordenados, siendo el eje principal el eje z.

Observación 1.6. *Las trazas del paraboloide hiperbólico en los planos paralelos al plano $z = 0$ son hipérbolas, salvo para $z = 0$, que da un par de rectas ue se cortan. Las trazas del paraboloide en los planos paralelos a los planos $x = 0$ e $y = 0$ son parábolas.*



Proposición 1.3. *El paraboloide hiperbólico es una cuádrica reglada, esto es, está engendrada por rectas.*



1.2. Ecuación reducida de una cuádrica.

Sea la cuádrica que, respecto de un sistema de referencia rectangular fijo, $\mathcal{R} = \{O, u_1, u_2, u_3\}$, tiene coordenadas x, y, z con expresión polinómica:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{01}x+2a_{02}y+2a_{03}z+a_{00} = 0 \quad (1)$$

y expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ó} \quad X^t A X = 0 \tag{2}$$

donde $X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y A es la matriz simétrica:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ \hline a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a_{00} & \bar{a}^t \\ \hline \bar{a} & A_0 \end{array}\right)$$

con $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i \neq j$, $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{pmatrix}$ y $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

La matriz A_0 representa los coeficientes de los términos cuadráticos del polinomio, la columna $\bar{a}$ representa los coeficientes de la parte lineal y a_{00} es el término constante.

Haremos un cambio de coordenadas rectangulares (una transformación ortogonal directa compuesta con una traslación de ejes) de modo que la ecuación polinómica (1) sea lo más sencilla posible.

Paso 1. Transformación ortogonal directa. La matriz asociada será una matriz ortogonal de orden 3, a la que llamaremos ϕ. La nueva referencia rectangular obtenida tras esta transformación es $\mathcal{R}^* = \{O, u_1^*, u_2^*, u_3^*\}$ con coordenadas x^*, y^*, z^*, esto es,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$$

o, de modo equivalente,

$$X = GX^*$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad X^* = \begin{pmatrix} 1 \\ x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} \text{ y } G = \begin{pmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \bar{0} & \phi \end{pmatrix}$$

Dado que nuestro objetivo es simplificar (1), esto se conseguirá diagonalizando la matriz A_0 que aparece en (2) mediante la transformación ortogonal. Elegimos ϕ de modo que

$$\phi^{-1}A_0\phi = \phi^t A_0 \phi = D$$

siendo D una matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal principal son los autovalores (todos reales) de la matriz simétrica A_0. Recordemos que las columnas de ϕ son las coordenadas de los vectores de una base de autovectores (unitarios) de A_0 asociados a los respectivos autovalores, cumpliéndose $|\phi| = 1$. Veamos cuál es la expresión matricial de la cuádrica respecto de la referencia $\mathcal{R}^*$:

$$X^t A X = (GX^*)^t A (GX^*) = X^{*t} G^t A G X^* = X^{*t} A^* X^*$$

donde

$$A^* = G^t A G = \begin{pmatrix} a_{00} & \bar{a}^t\phi \\ \phi^t\bar{a} & \phi^t A_0 \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00}^* & \bar{a}^{*t} \\ \bar{a}^* & A_0^* \end{pmatrix}$$

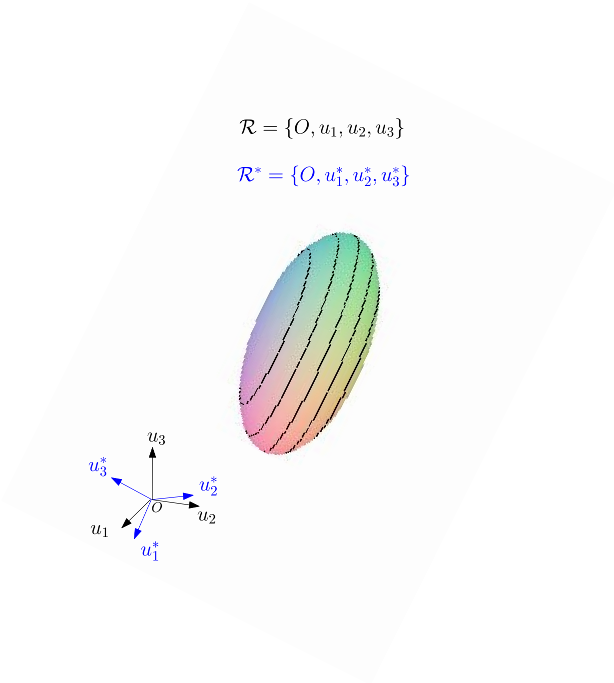
con $A_0^* = D = \begin{pmatrix} a_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^* \end{pmatrix}$.

De este modo, la ecuación matricial (2) pasa a ser de la forma

$$X^{*t} A^* X^* = 0 \tag{3}$$

La ecuación de la cuádrica respecto de la referencia $\mathcal{R}^*$, (3), es más sencilla que (2) (A_0^* es diagonal).

Obsérvese que al realizar la transformación ortogonal, desaparecen los términos cuadráticos cruzados x^*y^*, x^*z^*, y^*z^* en el polinomio de la cuádrica respecto de la nueva referencia $\mathcal{R}^*$.



Queda por hacer una traslación de los ejes de $\mathcal{R}^*$.

Paso 2. Traslación de ejes. Una traslación de ejes simplificará aún más la expresión (3). Denotamos a la nueva referencia rectangular después de la traslación como $\mathcal{R}^{**} = \{O^{**}, u_1^{**}, u_2^{**}, u_3^{**}\}$ y denotamos por x^{**}, y^{**}, z^{**} a las nuevas coordenadas.

La matriz de la traslación será

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \bar{t}^* & I \end{pmatrix}$$

con $\bar{t}^* = \begin{pmatrix} t_1^* \\ t_2^* \\ t_3^* \end{pmatrix}$ las coordenadas de O^{**} respecto de $\mathcal{R}^*$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se tiene

$$X^* = TX^{**}$$

siendo $X^{**} = \begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \\ z^{**} \end{pmatrix}$

Entonces,

$$X^{*t}A^*X^* = (TX^{**})^tA^*(TX^{**}) = X^{**t}T^tA^*TX^{**} = X^{**t}A^{**}X^{**}$$

con $A^{**} = T^t A^* T = (GT)^t A(GT)$. La ecuación matricial (3) pasa a ser de la forma

$$X^{**t} A^{**} X^{**} = 0 \tag{4}$$

Se prueba fácilmente que la matriz A^{**} tiene la forma:

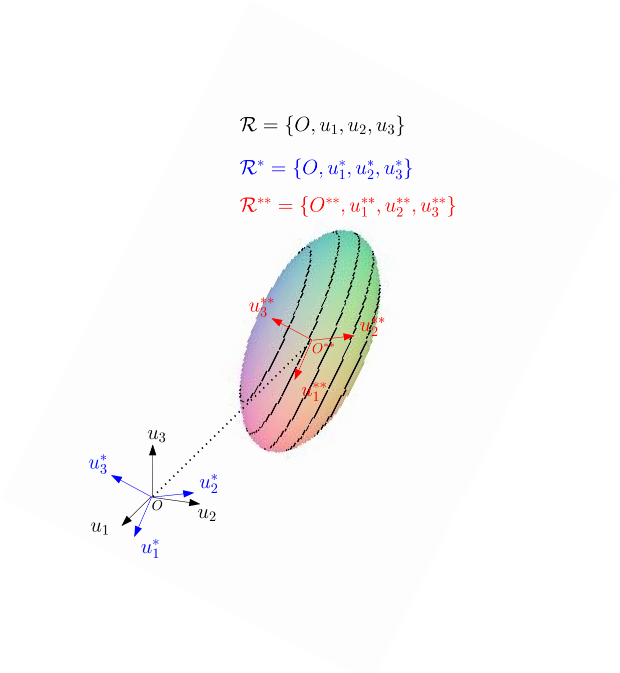
$$A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00} + 2\bar{a}^t\bar{t} + \bar{t}^t A_0 \bar{t} & (\bar{a} + A_0\bar{t})^t \phi \\ \phi^t(\bar{a} + A_0\bar{t}) & \phi^t A_0 \phi \end{pmatrix}$$

con $\bar{t} = \phi\bar{t}^*$, siendo $\bar{t}^*$ y $\bar{t}$ las coordenadas respecto de $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{R}$, respectivamente, del origen O^{**} de la nueva referencia.

Se busca que la parte lineal asociada a A^{**} sea lo más sencilla posible (si puede ser, nula) para simplificar la ecuación (4). Interesa elegir $\bar{t}$ para que $\phi^t(\bar{a} + A_0\bar{t}) = \bar{0}$. De ese modo, A^{**} sería diagonal. La condición a imponer es, pues,

$$\bar{a} + A_0\bar{t} = \bar{0} \tag{5}$$

No siempre será posible encontrar un $\bar{t}$ solución única de este sistema lineal. De haberlo, esas serán las coordenadas, respecto de $\mathcal{R}$, del *centro de la cuádrica*. Si el sistema es compatible indeterminado, la cuádrica tendrá infinitos centros y, si es incompatible, la cuádrica no tendrá centro (caso de los paraboloides).



Tendremos tres situaciones posibles para la matriz A^{**} en función de que exista uno, ninguno o infinitos centros:

i) **Cuádricas con centro único.**

La cuádrica tiene centro único si y sólo si el sistema (5) es compatible determinado, esto es, si $|A_0| = |A_0^*| \neq 0$ o, en otras palabras, si los tres autovalores de A_0 son no nulos. En este caso, tras la traslación, desaparecen los términos en x^*, y^* y z^*, obteniéndose la *matriz reducida*

$$\boxed{A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{22}^{**} \end{pmatrix} \qquad (6)}$$

que da lugar a la *ecuación reducida*, respecto de $\mathcal{R}^{**}$,

$$a_{11}^{**}x^{**2} + a_{22}^{**}y^{**2} + a_{33}^{**}z^{**2} + a_{00}^{**} = 0$$

En función de los signos de los coeficientes, los distintos casos posibles son: elipsoide real, elipsoide imaginario (conjunto vacío), hiperboloide hiperbólico, hiperboloide elíptico, cono imaginario (un punto) y cono real.

ii) **Cuádricas sin centro.**

a) Si exactamente uno de los autovalores de A_0 es nulo (por ejemplo, $a_{33}^{**} = 0$) y $|A| \neq 0$, se tiene $r(A_0) = r(A_0^{**}) = 2$ y $r(A) = 4$, de modo que (5) es incompatible. En este caso no se anulan los coeficientes de los tres términos lineales x^{**}, y^{**} y z^{**} y obtenemos paraboloides. El vértice (el punto O^{**}) se puede obtener determinando el plano ortogonal al eje del paraboloide y que lo corta en un punto (paraboloide elíptico) o en un par de rectas que se cortan en un punto (paraboloide hiperbólico). La matriz reducida resultante para el paraboloide es del tipo

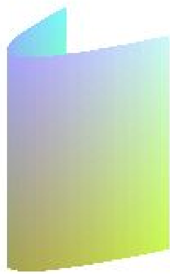
$$\boxed{A^{**} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{03}^{**} \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} & 0 \\ a_{30}^{**} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (7)}$$

Dependiendo del signo de los autovalores, obtendremos un paraboloide elíptico o un paraboloide hiperbólico.

b) Otro caso en que el sistema (5) es incompatible es aquel en que dos autovalores son nulos ($r(A_0) = 1$) y $r(A) = r(A^{**}) = 3$. Tras las traslaciones y giros adecuados, queda

$$\boxed{A^{**} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{02}^{**} & 0 \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 & 0 \\ a_{20}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (8)}$$

Estos son los cilindros parabólicos.



Cilindro parabólico $y = x^2$

iii) **Cuádricas con infinitos centros.**

a) Si exactamente un autovalor es nulo ($a_{33}^{**} = 0$) y $|A| = 0$, se tiene $r(A_0) = 2$ y $2 \leq r(A) = r(A^{**}) \leq 3$. Tras la traslación adecuada, la matriz resultante es

$$\boxed{A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (9)}$$

dando lugar a un cilindro elíptico (real o imaginario) o hiperbólico, o un par de planos (reales o imaginarios) que se cortan en una recta real, dependiendo del signo de los coeficientes.

Cilindro elíptico $x^2 + 2y^2 = 1$

Cilindro hiperbólico $x^2 - 2y^2 = 1$

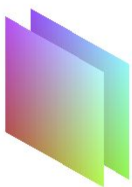
Planos reales que se cortan
en una recta real $x^2 - 2y^2 = 0$

Planos imaginarios que se cortan
en una recta real $x^2 + 2y^2 = 0$

b) Si exactamente dos autovalores son nulos o, de modo equivalente, $r(A_0) = 1$, (por ejemplo $a_{22}^{**} = a_{33}^{**} = 0$) y $r(A) < 3$, se obtiene

$$\boxed{A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (10)}$$

En este caso resultan un par de planos paralelos, pudiendo ser reales, imaginarios o coincidentes, dependiendo del valor de los coeficientes.



Planos paralelos reales $x^2 = 1$

Planos coincidentes reales $x^2 = 0$

c) Si los tres autovalores son cero, resulta

$$A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & a_{01}^{**} & a_{02}^{**} & a_{03}^{**} \\ a_{10}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ a_{20}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ a_{30}^{**} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Este es el caso de un plano.

1.3. Invariantes métricos de las cuádricas.

Proposición 1.4. Invariantes métricos de las cuádricas. *Las transformaciones rectangulares de coordenadas no modifican* $|A|, |A_0|$, $tr(A_0)$ *ni* $J(A_0)$, *siendo*

$$J(A_0) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$$

donde α_{ii} *es el adjunto de* a_{ii} *en* A_0.

En particular:

$$|A| = |A^*| = |A^{**}|, \quad |A_0| = |A_0^*| = |A_0^{**}|,$$

$$tr(A_0) = tr(A_0^*) = tr(A_0^{**}), \quad J(A_0) = J(A_0^*) = J(A_0^{**})$$

Demostración. Dado que $|T| = |G| = 1$,

$$|A^{**}| = |T^t A^* T| = |A^*| = |G^t A G| = |A|$$

Por otro lado, como $A_0^{**} = A_0^* = \phi^t A_0 \phi = \phi^{-1} A_0 \phi$, podemos afirmar que las matrices $A_0^{**} = A_0^*$ y A_0 son semejantes y, por tanto, tienen el mismo polinomio característico $-\lambda^3 + a_2\lambda^2 - a_1\lambda + a_0$. Como en el polinomio característico a_2 es la traza, a_1 es J y a_0 es el determinante de la matriz, queda probado que

$$|A_0^{**}| = |A_0^*| = |A_0| \quad tr(A_0^{**}) = tr(A_0^*) = tr(A_0) \quad \text{y} \quad J(A_0^{**}) = J(A_0^*) = J(A_0)$$

□

1.3.1. Coeficientes de la ecuación reducida en función de los invariantes.

i) **En las cuádricas con centro único** (con $|A_0| \neq 0$), los coeficientes de las ecuaciones reducidas (ver (6)) son

$$\boxed{a_{00}^{**} = \frac{|A^{**}|}{|A_0^{**}|} = \frac{|A|}{|A_0|}}$$

Por otro lado,

$$\boxed{a_{11}^{**},\ a_{22}^{**} \text{ y } a_{33}^{**} \text{ son las raíces de } p(\lambda)}$$

donde $p(\lambda) = -\lambda^3 + tr(A_0)\lambda^2 - J(A_0)\lambda + det(A_0)$ es el polinomio característico de A_0.

ii) **En las cuádricas sin centro**, tenemos dos casos posibles:

a) En los paraboloides (cuádricas con vértice), resulta (ver (7)) que

$$\boxed{a_{11}^{**} \text{ y } a_{22}^{**} \text{ son los autovalores no nulos de } A_0}$$

y $|A| = |A^{**}| = -a_{30}^{**2}\, a_{11}^{**}a_{22}^{**}$, de modo que

$$\boxed{a_{30}^{**} = \pm\sqrt{\frac{-|A|}{a_{11}^{**}a_{22}^{**}}} = \pm\sqrt{\frac{-|A|}{J(A_0)}}}$$

b) En los cilindros parabólicos (ver (8)), se tiene

$$\boxed{a_{11}^{**} = tr(A_0^{**}) = tr(A_0)}$$

y $\tilde{K}(A) = \tilde{K}(A^{**}) = -a_{02}^{**2}a_{11}^{**}$. Hemos denotado $\tilde{K}(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$, que es un invariante métrico para los cilindros y para los pares de planos. Cada A_{ii} es el adjunto de a_{ii} en A.

Por consiguiente, $a_{02}^{**2} = \frac{-\tilde{K}(A)}{tr(A_0)}$, con lo que

$$\boxed{a_{02}^{**} = \pm\sqrt{\frac{-\tilde{K}(A)}{tr(A_0)}}}$$

iii) **Si tenemos cuádricas con infinitos centros**, hay varias posibilidades:

a) En los casos de cilindros elípticos o hiperbólicos y de planos no paralelos (ver (9)),

$$J(A_0) = J(A_0^{**}) = a_{11}^{**}a_{22}^{**} \quad \text{y} \quad \tilde{K}(A) = \tilde{K}(A^{**}) = a_{00}^{**}a_{11}^{**}a_{22}^{**}$$

De modo que

$$\boxed{a_{00}^{**} = \frac{\tilde{K}(A)}{J(A_0)}}$$

$$\boxed{a_{11}^{**} \text{ y } a_{22}^{**} \text{ son los autovalores no nulos de } A_0}$$

b) En los casos de planos paralelos (ver (10)),

$$\boxed{tr(A_0) = tr(A_0^{**}) = a_{11}^{**}}$$

y $\tilde{J}(A) = \tilde{J}(A^{**}) = a_{00}^{**}a_{11}^{**}$, siendo

$$\tilde{J}(A) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{02} \\ a_{20} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{03} \\ a_{30} & a_{33} \end{vmatrix}$$

un invariante métrico. Por tanto,

$$\boxed{a_{00}^{**} = \frac{\tilde{J}(A)}{a_{11}^{**}} = \frac{\tilde{J}(A)}{tr(A_0)}}$$

c) Si lo que se tiene es un único plano (ver (11)), la ecuación ya está en forma reducida.

1.3.2. Clasificación de las cuádricas en función de los invariantes.

Observación 1.7. *Dado que A, A^* y A^{**} son congruentes, se tiene $r(A) = r(A^*) = r(A^{**})$ (de hecho, se mantiene el signo de los autovalores). Por identica razón, $r(A_0) = r(A_0^*) = r(A_0^{**})$. Si llamamos* **signatura** *de A al par $s(A) = (p, q)$ siendo p el número de autovalores positivos y q el número de autovalores negativos, ocurre que $s(A) = s(A^*) = s(A^{**})$ y $s(A_0) = s(A_0^*) = s(A_0^{**})$.*

En el siguiente esquema encontramos una clasificación de las cuádricas en función de los invariantes estudiados:

Caso 1. $|A| \neq 0$.

1.1. Si $|A_0| \neq 0$ (cuádrica con centro único), puede ocurrir:

- 1.1.a) $s(A_0) = (3, 0)$ y $|A| > 0$. Elipsoide imaginario.
- 1.1.b) $s(A_0) = (3, 0)$ y $|A| < 0$. Elipsoide real.
- 1.1.c) $s(A_0) = (2, 1)$ y $|A| > 0$. Hiperboloide hiperbólico.
- 1.1.d) $s(A_0) = (2, 1)$ y $|A| < 0$. Hiperboloide elíptico.

1.2. Si $|A_0| = 0$ (paraboloides), puede ocurrir:

- 1.2.a) $J(A_0) > 0$ (|A| <0). Paraboloide elíptico.
- 1.2.b) $J(A_0) < 0$ (|A| >0). Paraboloide hiperbólico.

Caso 2. $|A| = 0$.

2.1 Si $|A_0| \neq 0$ (conos), puede ocurrir:

- 2.1.a) $s(A_0) = (3, 0)$. Cono imaginario.
- 2.1.b) $s(A_0) = (2, 1)$. Cono real.

2.2 Si $|A_0| = 0$ (cilindros y planos), puede ocurrir:

2.2.1 Si $J(A_0) \neq 0$ (cilindros no parabólicos y planos secantes) puede ocurrir:

- 2.2.1.a) $J(A_0) > 0$ y $\tilde{K}(A) \neq 0$ con $sig(\tilde{K}(A)) = sig(tr(A_0))$. Cilindro elíptico imaginario.
- 2.2.1.b) $J(A_0) > 0$ y $\tilde{K}(A) \neq 0$ con $sig(\tilde{K}(A)) \neq sig(tr(A_0))$. Cilindro elíptico real.
- 2.2.1.c) $J(A_0) > 0$ y $\tilde{K}(A) = 0$. Dos planos imaginarios secantes.
- 2.2.1.d) $J(A_0) < 0$ y $\tilde{K}(A) \neq 0$. Cilindro hiperbólico.
- 2.2.1.e) $J(A_0) < 0$ y $\tilde{K}(A) = 0$. Dos planos reales secantes.

2.2.2 Si $J(A_0) = 0$ (cilindros parabólicos y planos paralelos) puede ocurrir:

- 2.2.2.a) $tr(A_0) \neq 0$ con $\tilde{K}(A) \neq 0$. Cilindro parabólico.
- 2.2.2.b) $tr(A_0) \neq 0$ con $\tilde{K}(A) = 0$ y $\tilde{J}(A) > 0$. Dos planos imaginarios paralelos.
- 2.2.2.c) $tr(A_0) \neq 0$ con $\tilde{K}(A) = 0$ y $\tilde{J}(A) < 0$. Dos planos reales paralelos.
- 2.2.2.d) $tr(A_0) \neq 0$ con $\tilde{K}(A) = 0$ y $\tilde{J}(A) = 0$. Dos planos coincidentes.
- 2.2.2.e) $tr(A_0) = 0$. Un plano único.

Ejemplo 1. Clasificar y determinar la ecuación reducida de la cuádrica $x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz + 4yz - 4y - 4z = 0$.

Se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

con $|A| = -8$ y $|A_0| = 2$. El polinomio característico de A_0 es $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - (3 + \sqrt{7}))(\lambda - (3 - \sqrt{7}))$.

Los tres autovalores son positivos, de modo que $s(A_0) = (3, 0)$. Además, $|A| < 0$, por lo que tenemos un elipsoide real.

La ecuación reducida se determina a partir de la matriz

$$A^{**} = \begin{pmatrix} -4 & & & \\ & 1 & & \\ & & 3+\sqrt{7} & \\ & & & 3-\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

La ecuación reducida es

$$x^{**2} + (3 + \sqrt{7})y^{**2} + (3 - \sqrt{7})z^{**2} = 4$$

Ejemplo 2. Clasificar y encontrar la ecuación reducida de la cuádrica $9y^2 + 4z^2 - 36 = 0$.

$$A = A^{**} = \begin{pmatrix} -36 & & & \\ & 0 & & \\ & & 9 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = A_0^{**} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 9 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = |A_0| = 0$, $J(A_0) = 36 > 0$ y $\widetilde{K}(A) = -36^2 < 0$, se tiene un cilindro elíptico real.

La ecuación reducida es la del enunciado

$$\frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^3} = 1$$

Ejemplo 3. Clasificar y encontrar la ecuación reducida de la cuádrica $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene $|A| = -3/4$ y $|A_0| = -1$. El polinomio característico de A_0 es $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - (1 + \sqrt{2}))(\lambda - (1 - \sqrt{2}))$. Dos de los autovalores son positivos y uno negativo, de modo que la signatura es $s(A_0) = (2, 1)$. Tenemos un hiperboloide elíptico (hiperboloide de dos hojas).

La matriz asociada a la ecuación reducida es

$$A^{**} = \begin{pmatrix} 3/4 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1+\sqrt{2} & \\ & & & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La ecuación reducida es

$$x^{**2} + (1 + \sqrt{2})y^{**2} + (1 - \sqrt{2})z^{**2} + 3/4 = 0$$

ó

$$-\frac{x^{**2}}{\left(\sqrt{3/4}\right)^2} - \frac{y^{**2}}{\left(\sqrt{\frac{3}{4(1+\sqrt{2})}}\right)^2} + \frac{z^{**2}}{\left(\sqrt{\frac{3}{4(\sqrt{2}-1)}}\right)^2} = 1$$

Ejemplo 4. Dada la cuádrica $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 4x + 4y + 5 = 0$, se pide: clasificación y ecuación reducida.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, $|A| = -8$ y $|A_0| = 0$. Se tiene un paraboloide elíptico. El polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 2)^2$, de modo que el autovalor no nulo es el 2 (doble). Se tiene $a_{11}^{**} = a_{22}^{**} = 2$. Por otro lado, $a_{03}^{**} = \pm\sqrt{-\frac{|A|}{J}} = \pm\sqrt{2}$. Escogemos el signo opuesto al de los autovalores. La matriz A^{**} es

$$A^{**} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{03}^{**} \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} & 0 \\ a_{30}^{**} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación reducida es

$$x^{**2} + y^{**2} = \sqrt{2}z^{**}$$

Ejemplo 5. Dada la cuádrica $x^2+(m+1)y^2+mz^2-2yz+2xy+2x+2z+4=0$, se pide determinar m para obtener un paraboloide hiperbólico y hallar la ecuación reducida en este caso.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m+1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & m \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & -1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$$

Tenemos $|A| = 3m^2 - 1 - 2m = (3m+1)(m-1)$ y $|A_0| = (m-1)(m+1)$. Para que la cuádrica sea un paraboloide hiperbólico debe ocurrir que $|A| > 0$ y $|A_0| = 0$. Esto sólo ocurre si $m = -1$, de modo que la matriz asociada será

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En este caso, $|A| = 4$ y $|A_0| = 0$. El polinomio característico de A_0 es $p(\lambda) = \lambda(3-\lambda^2)$. Los autovalores son $\lambda = 0$, $\lambda = \sqrt{3}$ y $\lambda = -\sqrt{3}$. Dado que $J(A_0) = -3$, la matriz asociada a la ecuación reducida es

$$A^{**} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{03}^{**} \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} & 0 \\ a_{30}^{**} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ -2/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación reducida es

$$\sqrt{3}x^{**2} - \sqrt{3}y^{**2} - \frac{4}{\sqrt{3}}z^{**} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{x^{**2}}{\left(\sqrt{4/3}\right)^2} - \frac{y^{**2}}{\left(\sqrt{4/3}\right)^2} = z^{**}$$

1.4. Cálculo de los elementos de una cuádrica.

- **Centro y ejes de cuádricas con centro.** Si la cuádrica tiene centro (o centros), éste se obtiene resolviendo el sistema lineal (5), $\bar{a} + A_0\bar{t} = \bar{0}$.

Los ejes se obtienen a partir de los autovectores asociados a los autovalores de A_0 (las columnas de ϕ) apoyados en el centro. En concreto, el eje principal de un hiperboloide o un cono se corresponde con el autovector correspondiente al autovalor de signo distinto a los otros dos.

Ejemplo 6. Dado el hiperboloide elíptico del ejemplo 4, $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz+3x-y+z+1=0$, obtener su centro, sus ejes y sus vértices.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_0=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado que $|A|=-3/4$, $|A_0|=-1$ y el polinomio característico de A_0 es $p(\lambda)=-(\lambda-1)(\lambda-(1+\sqrt{2}))(\lambda-(1-\sqrt{2}))$, se deduce que

$$A^{**}=\begin{pmatrix} 3/4 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1+\sqrt{2} & \\ & & & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y la ecuación reducida es

$$-\frac{x^{**2}}{\left(\sqrt{3/4}\right)^2}-\frac{y^{**2}}{\left(\sqrt{\frac{3}{4(1+\sqrt{2})}}\right)^2}+\frac{z^{**2}}{\left(\sqrt{\frac{3}{4(\sqrt{2}-1)}}\right)^2}=1$$

El centro, $\bar{c}$, se calcula resolviendo el sistema lineal

$$A_0\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Se obtiene $\bar{c}=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Los ejes se determinan a partir de los autovectores asociados a los autovalores de A_0.

$$V_1 = L\{(0,1,1)\} \qquad V_{1+\sqrt{2}} = L\{(\sqrt{2},-1,1)\} \qquad V_{1-\sqrt{2}} = L\{(-\sqrt{2},-1,1)\}$$

La matriz del giro, ϕ, será

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Debemos asegurarnos de que $|\phi| = 1$. Por eso hemos cambiado el signo de la última columna. Calculemos los tres ejes.

El eje X^{**} es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El eje Y^{**} es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El eje Z^{**} es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El eje que corta al hiperboloide es el asociado al autovector del autovalor de signo distinto (el eje Z^{**}).

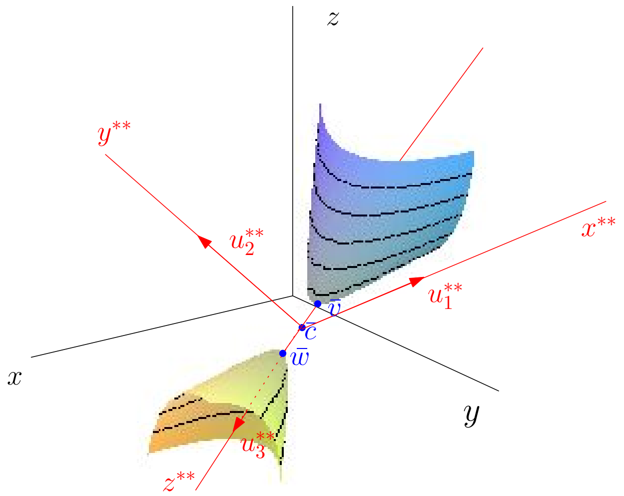
Los vértices se encuentran sobre el eje Z^{**}. En conccreto, dado que la ecuación reducida es

$$-\frac{x^{**2}}{\left(\sqrt{3/4}\right)^2} - \frac{y^{**2}}{\left(\sqrt{\frac{3}{4(1+\sqrt{2})}}\right)^2} + \frac{z^{**2}}{\left(\sqrt{\frac{3}{4(\sqrt{2}-1)}}\right)^2} = 1,$$

resulta que $a = \sqrt{3/4}$, $b = \sqrt{\frac{3}{4(\sqrt{2}+1)}}$ y $c = \sqrt{\frac{3}{4(\sqrt{2}-1)}}$, y los vértices $\bar{v}$ y $\bar{w}$ serán, por tanto:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{3}{4(\sqrt{2}-1)}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \sqrt{\frac{3}{4(\sqrt{2}-1)}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$



Las coordenadas de u_1^{**}, u_2^{**} y u_3^{**} son las columnas de ϕ

- **Vértice y ejes de los paraboloides.** El eje se obtiene apoyando en el vértice el autovector asociado al autovalor 0 (la columna de ϕ correspondiente a $\lambda = 0$). Los otros dos ejes (secundarios) se obtienen apoyando en el vértice los autovectores dados por las otras columnas de ϕ. Para obtener el vértice, se corta la familia de planos perpendiculares al eje de la cuádrica con ésta. Si el paraboloide es elíptico, existe un plano que lo corta exactamente en un punto que será el vértice. Si el paraboloide es hiperbólico, existe un plano que lo corta en dos rectas cuya intersección es el vértice.

  Ejemplo 7. Dado el paraboloide elíptico del ejemplo 5, $x^2+2y^2+z^2-2xz+4x+4y+5=0$, se pide: vértice y ejes.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2$ y la matriz A^{**} es

$$A^{**} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{03}^{**} \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} & 0 \\ a_{30}^{**} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, la ecuación reducida será

$$x^{**2} + y^{**2} = \sqrt{2} z^{**}$$

Calculemos el vértice $\bar{v}$. Para ello debemos tener en cuenta el autovector asociado al autovalor nulo:

$$V_0 = L\{(1,0,1)\}$$

El eje principal del paraboloide está apoyado en el vértice y tiene la dirección del autovector $(1,0,1)$. Cada plano del haz de planos paralelos de ecuaciones $x+z=m$ es perpendicular al vector $(1,0,1)$. Buscamos, de entre todos estos planos, aquel que corta a la cuádrica en un punto. Dicho punto será el vértice, $\bar{v}$, buscado. Sustituimos $z = m - x$ en la ecuación de la cuádrica para obtener el haz de cónicas resultante de la intersección de cada plano con el paraboloide. Se tiene

$$4x^2 + 2y^2 + 4x + 4y - 4xm + m^2 + 5 = 0 \qquad [1]$$

En esta ecuación sólo aparecen las incógnitas x e y. Se interpreta como un haz de cónicas que clasificamos a continuación. La matriz B asociada es

$$B = \begin{pmatrix} m^2+5 & -2m+2 & 2 \\ -2m+2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Buscamos el valor de m que hace que esta cónica sea un par de rectas imaginarias que se cortan en un punto real. Para ello debe ocurrir que $|B| = 0$ y $|B_0| > 0$. Como $|B_0| = 8 > 0$, la única condición que falta por verificar es $|B| = 16 + 16m = 0$ que equivale a pedir $m = -1$. El plano buscado es

$$\pi \equiv \{x + z = -1\}$$

Sustituimos en [1] el valor $m = -1$ y tenemos

$$4x^2 + 2y^2 + 8x + 4y + 6 = 0$$

Despejando la x, queda

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 16(2y^2 + 4y + 6)}}{8} = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2y^2 - 4y - 2}$$

Dado que sólo puede haber una x como solución, debe ocurrir $-2y^2 - 4y - 2 = 0$, esto es, $y = -1$. Tenemos que el vértice tiene coordenada $v_1 = -1$, $v_2 = -1$ y, sustituyendo en $z = m - x$, $v_3 = -1 - (-1) = 0$. Por tanto,

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los ejes se obtienen a partir de los autovectores. Al hacer los cálculos, resulta

$$V_0 = L\{(-1, 0, -1)\}, \qquad V_2 = L\{(-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

Debe recordarse que los tres autovectores han de ser perpendiculares (los que se obtengan del autovalor 2 deben elegirse perpendiculares).

Eje X^{**}

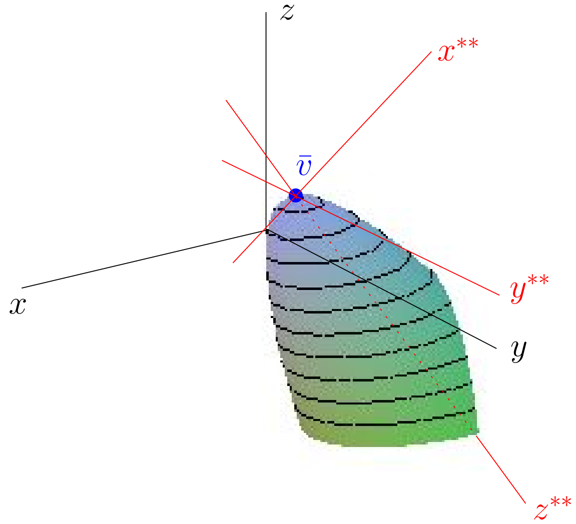
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eje Y^{**}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eje Z^{**}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Para asegurarnos de que la figura es correcta y que el paraboloide apunta en el sentido dado por el vector $(-1, 0, -1)$ y no en el sentido del vector $(1, 0, 1)$, basta coger el punto $(-1, -1, 0) + (-1, 0, -1) = (-2, -1, -1)$ y considerar el plano de la familia $x + z = m$ que pasa por él. Este plano es $x + z = -3$, de modo que $m = -3$. En ese caso $|B_0| = 8 > 0$, $tr(B_0) = 6$ y $|B| = -32 < 0$ por lo que el corte con la cuádrica es una elipse real. Esto indica que el semieje positivo de x^{**} tiene el sentido del vector $(-1, 0, -1)$ y la figura es la adecuada.

- **Ejes de los cilindros.** En los casos de cilindros elípticos o hiperbólicos, el eje está determinado por la solución de (5) (una recta de centros). Su dirección coincide con la columna de ϕ asociada al autovalor nulo. Los otros dos ejes (secundarios) vienen dados por las direcciones de las otras dos columnas de ϕ.

  En el caso de cilindros parabólicos, se tiene que los autovalores son $a_{11}^{**} \neq 0$ con autovector v_1, tangente en el vértice a la sección recta del cilindro, $a_{22}^{**} = 0$ con autovector v_2, el eje de la sección recta, y $a_{33}^{**} = 0$ con autovector v_3, que determina la dirección de las generatrices del cilindro. Para distinguir v_2 de v_3, basta considerar la recta que genera cada uno. Si la recta λv_2 corta al cilindro en un solo punto, v_2 determina el eje de la sección recta del cilindro. Si λv_2 no corta al cilindro o está completamente contenida en él, v_2 determina la dirección de las generatrices. En cuanto localicemos la recta formada por los vértices de las secciones rectas (con vector director v_3), tendremos todo hecho. Para ello basta considerar el vector v_2, eje de las secciones rectas, y los planos perpendiculares al mismo. Nos quedaremos con el plano que corta a la cuádrica en, exactamente, una recta, que será la recta de vértices.