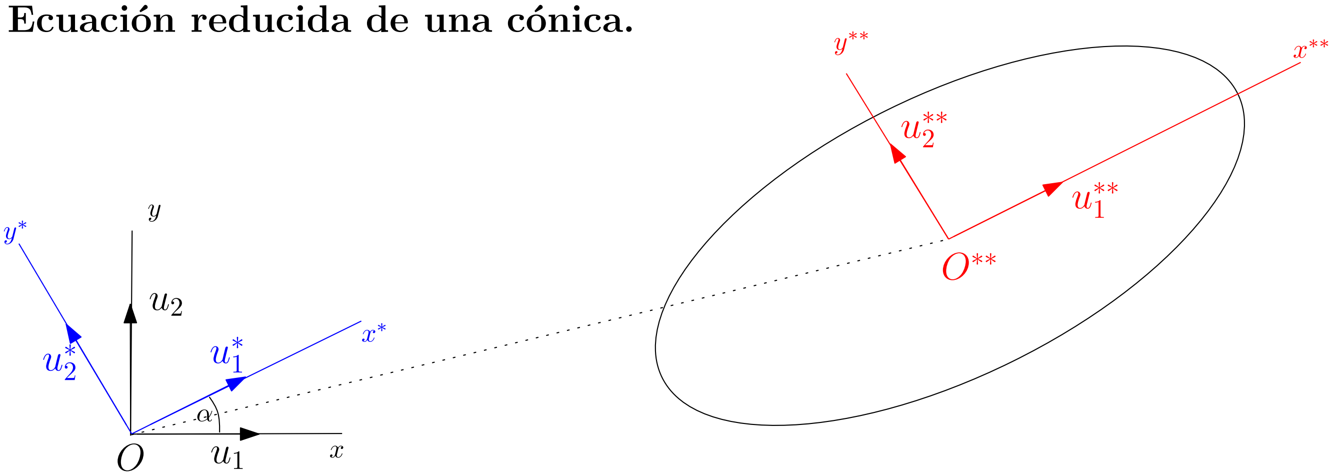
CÓNICAS

Ecuación reducida de una cónica.



$$\mathcal{R} = \{O, u_1, u_2\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \bar{a} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{00} & \bar{a}^t \\ \bar{a} & A_0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(1 \quad x \quad y) \quad A \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0} \qquad \boxed{X^t A X = 0}$$

GIRO

$$\mathcal{R}^* = \{O^*, u_1^*, u_2^*\}$$

$$X^* = \begin{pmatrix} 1 \\ x^* \\ y^* \end{pmatrix} \qquad \phi = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \bar{0} & \phi \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ con ϕ giro que representa la matriz de cambio de base $X = GX^*$

$$X^t A X = (GX^*)^t A (GX^*) = X^{*t}(G^t A G)X^*$$

$X^t A X = 0$ si y sólo si $X^{*t} A^* X^* = 0$ donde $A^* = G^t A G$

$$\boxed{A^* = G^t A G = \begin{pmatrix} a_{00} & \bar{a}^t\phi \\ \phi^t \bar{a} & \phi^t A_0 \phi \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{Se ha elegido el giro } \phi \text{ de modo que } A_0^* = \phi^t A_0 \phi = \phi^{-1} A_0 \phi = D = \begin{pmatrix} a_{11}^* & 0 \\ 0 & a_{22}^* \end{pmatrix} \text{ sea diagonal}}$

La ecuación de la cónica respecto de $\mathcal{R}^*$ es $\boxed{(1 \quad x^* \quad y^*) \quad A^* \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x^* \\ y^* \end{pmatrix} = 0}$ ó $\boxed{X^{*t} A^* X^* = 0}$

Resulta más sencilla que la ecuación inicial, dado que A^* es más simple que A.

TRASLACIÓN

$$\mathcal{R}^{**} = \{O^{**}, u_1^{**}, u_2^{**}\}$$

$\bar{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ coordenadas del centro de la cónica respecto de $\mathcal{R}$

$\bar{t}^* = \begin{pmatrix} t_1^* \\ t_2^* \end{pmatrix}$ coordenadas del centro de la cónica respecto de $\mathcal{R}^*$

Entonces $\phi \bar{t}^* = \bar{t}$ y $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1^* \\ t_2^* \end{pmatrix}$

Si $X^{**} = \begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} 1 & \bar{0} \\ \bar{t}^* & Id \end{pmatrix}$ entonces $X^* = TX^{**}$

$$X^{*t} A^* X^* = (TX^{**})^t A^* (TX^{**}) = X^{**t} (T^t A^* T) X^{**}$$

$X^{*t} A^* X^* = 0$ si y sólo si $X^{**t} A^{**} X^{**} = 0$ donde $A^{**} = T^t A^* T = T^t (G^t A G) T$

$$\boxed{A^{**} = T^t (G^t A G) T = \begin{pmatrix} a_{00} + 2\bar{a}^t \bar{t} + \bar{t}^t A_0 \bar{t} & (\bar{a} + A_0 \bar{t})^t \phi \\ \phi^t (\bar{a} + A_0 \bar{t}) & \phi^t A_0 \phi \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{La ecuación del centro de la cónica, en caso de haberlo, es } \bar{a} + A_0 \bar{t} = \bar{0}.}$

La ecuación de la cónica respecto de $\mathcal{R}^{**}$ es

$$\boxed{(1 \quad x^{**} \quad y^{**}) \quad A^{**} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = 0} \qquad \text{ó} \qquad \boxed{X^{**t} A^{**} X^{**} = 0}$$

Resulta más sencilla que la ecuación la inicial, dado que, si la cónica tiene centro, A^{**} es diagonal.

Invariantes métricos de las cónicas.

$$|A| = |A^*| = |A^{**}|$$
$$|A_0| = |A_0^*| = |A_0^{**}|$$
$$tr(A_0) = tr(A_0^*) = tr(A_0^{**})$$

Matrices reducidas

Existen tres situaciones posibles para la matriz A^{**} en función de que exista uno, ninguno o infinitos centros ($\bar{a} + A_0\bar{t} = \bar{0}$ compatible determinado, incompatible o compatible indeterminado):

i) En caso de que la cónica tenga centro único ($|A_0| = |A_0^*| \neq 0$) o, en otras palabras, si los dos autovalores de A_0 son no nulos, la *matriz reducida* es

$$A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} \end{pmatrix}$$

con

$$\boxed{a_{00}^{**} = \frac{|A|}{|A_0|}}$$

y

$$\boxed{a_{11}^{**} \text{ y } a_{22}^{**} \text{ las raíces de } p(\lambda)\text{, el polinomio característico de } A_0}$$

Los casos posibles son: elipse real, conjunto vacío, hipérbola, un punto o dos rectas reales que se cortan.

ii) Si alguno de los autovalores de A_0 es nulo y $|A| \neq 0$, es el caso de la parábola (cónica con vértice). La matriz reducida resultante es

$$A^{**} = \begin{pmatrix} 0 & a_{01}^{**} & \\ a_{10}^{**} & 0 & \\ & & a_{22}^{**} \end{pmatrix}$$

con

$$\boxed{a_{22}^{**} = tr(A_0)}$$

y

$$\boxed{a_{10}^{**} = \pm\sqrt{\frac{-|A|}{tr(A_0)}}}$$

iii) Si alguno de los autovalores de A_0 es nulo y $|A| = 0$, la matriz A^{**} es

$$A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & & \\ & 0 & \\ & & a_{22}^{**} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{0 \text{ y } a_{22}^{**} \text{ son los autovalores de } A_0}$$
$$\boxed{a_{00}^{**} = \frac{A_{11}+A_{22}}{tr(A_0)}}$$

siendo A_{ii} el adjunto de a_{ii} en A.

Tendremos una recta doble, dos rectas paralelas reales o dos rectas paralelas imaginarias.

Clasificación de las cónicas en función de los invariantes

Caso 1. $|A| \neq 0$.

1.1. Si $|A_0| \neq 0$ (cónica con centro único), puede ocurrir:

1.1.a) $|A_0| > 0$ y $sig(|A|) = sig(tr(A_0))$. Elipse imaginaria.

1.1.b) $|A_0| > 0$ y $sig(|A|) \neq sig(tr(A_0))$. Elipse real.

1.1.c) $|A_0| < 0$. Hipérbola

1.2. Si $|A_0| = 0$. Parábola.

Caso 2. $|A| = 0$.

2.1 Si $A_0 \neq 0$ (rectas no paralelas), puede ocurrir:

2.1.a) $|A_0| > 0$ par de rectas imaginarias (un punto).

2.1.b) $|A_0| < 0$ par de rectas reales.

2.2 Si $|A_0| = 0$ (rectas paralelas), puede ocurrir:

2.2.a) $A_{11} + A_{22} > 0$ par de rectas imaginarias distintas.

2.2.b) $A_{11} + A_{22} < 0$ par de rectas reales distintas.

2.2.c) $A_{11} + A_{22} = 0$ recta doble.