CÓNICAS

1. Dada la cónica $x^2 + 2xy - y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$, se pide su clasificación y los elementos característicos de la misma.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se tiene $|A| = -6$ y $|A_0| = -2$, de modo que la cónica es una hipérbola. Calculemos su centro.

$$A_0 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema, resulta

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos la ecuación reducida. Basta encontrar la matriz diagonal

$$A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & & \\ & a_{11}^{**} & \\ & & a_{22}^{**} \end{pmatrix}$$

Recuérdese que $a_{00}^{**} = \frac{|A|}{|A_0|} = 3$ y que $a_{11}^{**} = \sqrt{2}$, $a_{22}^{**} = -\sqrt{2}$ son los autovalores de A_0. Por tanto, la ecuación reducida se obtiene a partir de la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & x^{**} & y^{**} \end{pmatrix} A^{**} \begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = 0$$

quedando

$$-\sqrt{2}x^{**2} + \sqrt{2}y^{**2} = 3 \qquad \text{ó} \qquad -\frac{x^{**2}}{\left(\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}\right)^2} + \frac{y^{**2}}{\left(\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}\right)^2} = 1$$

Calculemos los ejes. Para ello debemos obtener los subespacios propios

$$V_{\sqrt{2}} = L\left\{\left(1, -1+\sqrt{2}\right)\right\} \qquad \text{y} \qquad V_{-\sqrt{2}} = L\left\{\left(1-\sqrt{2}, 1\right)\right\}$$

Dado que hemos elegido A_0^{**} con primer autovalor $\sqrt{2}$ y con segundo autovalor $-\sqrt{2}$, la matriz ϕ del giro tiene por primera columna el autovector asociado a $\sqrt{2}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$, dividido entre su norma y por segunda columna el autovector asociado a $-\sqrt{2}$, $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, dividido entre su norma. Debemos asegurarnos de que $|\phi| = 1$. De no ser así, cambiaríamos el signo de uno de los autovectores.

El eje X^{**} es, por tanto,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

El eje Y^{**} es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las asíntotas pasan por el centro $\bar{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tienen pendientes m que se obtienen de la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

Resolviendo, se tiene $m = 1 \pm \sqrt{2}$, de manera que las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = (1+\sqrt{2})(x-1) \qquad \text{y} \qquad y = (1-\sqrt{2})(x-1)$$

Si deseamos obtener vértices y focos, debemos tener en cuenta la matriz ϕ cuyas columnas son autovectores unitarios que, apoyados en $\bar{c}$, generan los ejes X^{**} e Y^{**}. Recuérdese que la ecuación reducida es

$$-\frac{x^{**2}}{\left(\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}\right)^2}+\frac{y^{**2}}{\left(\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}\right)^2}=1,$$

de manera que la hipérbola corta al eje Y^{**}, siendo $a=b=\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}$. Por tanto, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{6}{\sqrt{2}}}$. Para hallar tanto vértices como focos, dado que están sobre el eje Y^{**}, debemos usar el vector $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ dividido entre su norma, que es $\sqrt{4-2\sqrt{2}}$.

Los dos vértices son los puntos

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}-\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

Los dos focos son los puntos

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\sqrt{\frac{6}{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}-\sqrt{\frac{6}{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

2. Dada la cónica $y^2-x^2+4x-2y+3=0$ se pide su clasificación y los elementos característicos de la misma.

Dado que $|A|=-6$ y $|A_0|=-1$, la cónica es una hipérbola. No está girada, ya que A_0 es diagonal. Por tanto, la matriz ϕ del giro es la identidad, $\phi=I$, (el ángulo de giro, α, es de 0 grados). Los autovalores de A_0 son -1 y 1. Los subespacios propios son

$$V_{-1} = L\{(1,0)\} \qquad \text{y} \qquad V_1 = L\{(0,1)\}$$

El centro es el punto

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación reducida se obtiene a partir de la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & x^{**} & y^{**} \end{pmatrix} A^{**} \begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = 0$$

Como

$$A^{**} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la ecuación reducida es

$$x^{**2} - y^{**2} = 6 \qquad \text{ó} \qquad \frac{x^{**2}}{(\sqrt{6})^2} - \frac{y^{**2}}{(\sqrt{6})^2} = 1$$

El eje X^{**} es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El eje Y^{**} es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular vértices y focos, debemos tener en cuenta que la ecuación reducida es

$$\frac{x^{**2}}{(\sqrt{6})^2} - \frac{y^{**2}}{(\sqrt{6})^2} = 1$$

de modo que la hipérbola corta al eje X^{**}, cuyo vector director es $(1,0)$. Además, $a = b = \sqrt{6}$ y $c = \sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{3}$. Por consiguiente, los vértices son los puntos

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \sqrt{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esto es, los puntos $(2+\sqrt{6}, 1)$ y $(2-\sqrt{6}, 1)$.

Los focos son los puntos

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \pm 2\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esto es, los puntos $(2+2\sqrt{3}, 1)$ y $(2-2\sqrt{3}, 1)$.

Las asíntotas pasan por el centro $\bar{c}$ y tienen pendiente $m = \pm 1$, de modo que son las rectas

$$y - 1 = x - 2 \qquad \text{y} \qquad y - 1 = -(x-2)$$

3. Dado el haz de cónicas:

$$\lambda x^2 + 2\lambda xy + y^2 - 2\lambda x + 2y + 2\lambda = 0$$

i) Discutir su naturaleza en función de los valores de λ.

ii) Determinar el lugar geométrico de los centros de las cónicas del haz.

Resolvamos el apartado i).

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda & -\lambda & 1 \\ -\lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene

$$|A| = -2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda = \lambda(-2\lambda^2 - \lambda - 1).$$

El polinomio $-2\lambda^2 - \lambda - 1$ es irreducible de modo que $|A| = 0$ si y sólo si $\lambda = 0$. Además, si se representa gráficamente $-2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda$ es claro que:

- Si $\lambda \in (-\infty, 0)$, entonces $|A| > 0$.

- Si $\lambda = 0$, entonces $|A| = 0$.

- Si $\lambda \in (0, \infty)$, entonces $|A| < 0$.

Por otro lado, $|A_0| = -\lambda^2 + \lambda = \lambda(1-\lambda)$, de modo que:

- Si $\lambda < 0$ ó $\lambda > 1$, entonces $|A_0| < 0$.

- Si $\lambda = 0$ ó $\lambda = 1$, entonces $|A_0| = 0$.

- Si $0 < \lambda < 1$, entonces $|A_0| > 0$.

Organizando toda esta información se tiene que:

- Si $\lambda \in (-\infty, 0)$, entonces $|A| \neq 0$ y $|A_0| < 0$. Hipérbola.
- Si $\lambda = 0$, entonces $|A| = |A_0| = 0$ y $A_{11} + A_{22} = -1 < 0$. Rectas paralelas.
- Si $\lambda \in (0, 1)$, entonces $|A| < 0$, $|A_0| > 0$, $tr(A_0) = \lambda + 1 > 0$. Elipse real.
- Si $\lambda = 1$, entonces $|A| < 0$ y $|A_0| = 0$. Parábola.
- Si $\lambda \in (1, \infty)$, entonces $|A| < 0$ y $|A_0| < 0$. Hipérbola.

4. Clasificar y hallar la ecuación reducida de las cónicas:

a) $4x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y + 3 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1/2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con $|A| = 6$, $|A_0| = 3$ y $tr(A_0) = 5 > 0$. Elipse imaginaria.

Se tiene $a_{00}^{**} = \frac{|A|}{|A_0|} = 2$. Los autovalores de A_0 son $a_{11}^{**} = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ y $a_{22}^{**} = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$. En consecuencia, la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & x^{**} & y^{**} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = 0$$

da lugar a la ecuación reducida

$$\frac{5+\sqrt{13}}{2} x^{**2} + \frac{5-\sqrt{13}}{2} y^{**2} + 2 = 0$$

b) $x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 3y + 2 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 3/2 \\ -3/2 & 1 & -2 \\ 3/2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

con $|A| = -\frac{3}{2}$, $|A_0| = -3 < 0$. Hipérbola.

Se tiene $a_{00}^{**} = \frac{|A|}{|A_0|} = \frac{1}{2}$. Los autovalores de A_0 son $a_{11}^{**} = 3$ y $a_{22}^{**} = -1$. En consecuencia, la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & x^{**} & y^{**} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = 0$$

da lugar a la ecuación reducida

$$3x^{**2} - y^{**2} + \frac{1}{2} = 0 \qquad \text{ó} \qquad -\frac{x^{**2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} + \frac{y^{**2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

c) $2x^2 - 12xy + 18y^2 + x - 3y - 6 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 2 & -6 \\ -3/2 & -6 & 18 \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$$

con $|A| = 0$, $|A_0| = 0$ y

$$A_{11} + A_{22} = \begin{vmatrix} -6 & -3/2 \\ -3/2 & 18 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -6 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{vmatrix} < 0$$

Tenemos dos rectas paralelas reales.

Para el caso de rectas paralelas reales, $a_{00}^{**} = \frac{A_{11}}{a_{22}} = \frac{-49}{8}$. Los autovalores de A_0 son $a_{11}^{**} = 0$ (uno siempre es nulo para el caso de rectas paralelas reales) y $a_{22}^{**} = tr(A_0) = 20$. En consecuencia, la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & x^{**} & y^{**} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-49}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = 0$$

da lugar a la ecuación reducida

$$-\frac{49}{8}+20y^{**2}=0 \qquad \text{ó} \qquad y^{**2}=\frac{49}{160}$$

Dicho de otro modo, $y^{**}=\pm\frac{7}{4\sqrt{10}}$.

d) $6x^2-4xy+9y^2-4x-32y-6=0$.

$$A=\begin{pmatrix} -6 & -2 & -16 \\ -2 & 6 & -2 \\ -16 & -2 & 9 \end{pmatrix} \qquad A_0=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

con $|A|=-2000$, $|A_0|=50$ y $tr(A_0)=15$. Elipse real.

Se tiene $a_{00}^{**}=\frac{|A|}{|A_0|}=-40$. Los autovalores de A_0 son $a_{11}^{**}=5$ y $a_{22}^{**}=10$. En consecuencia, la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & x^{**} & y^{**} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix}=0$$

da lugar a la ecuación reducida

$$5x^{**2}+10y^{**2}-40=0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{x^{**2}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}+\frac{y^{**2}}{2^2}=1$$

e) $3x^2-4xy-4y^2+16x+16y-12=0$.

$$A=\begin{pmatrix} -12 & 8 & 8 \\ 8 & 3 & -2 \\ 8 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad A_0=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

con $|A|=0$ y $|A_0|=-16<0$. Rectas no paralelas reales.

Se tiene $a_{00}^{**}=\frac{|A|}{|A_0|}=0$. Los autovalores de A_0 son $a_{11}^{**}=\frac{-1+\sqrt{65}}{2}$ y $a_{22}^{**}=\frac{-1-\sqrt{65}}{2}$. En consecuencia, la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & x^{**} & y^{**} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{65}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1-\sqrt{65}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix}=0$$

da lugar a la ecuación reducida

$$\frac{-1+\sqrt{65}}{2}x^{**2}+\frac{-1-\sqrt{65}}{2}y^{**2}=0$$

La ecuación inicial de las rectas no paralelas, $3x^2-4xy-4y^2+16x+16y-12=0$, es posible expresarla como producto de dos rectas (producto de dos polinomios de grado 1 igualado a 0). Para ello basta despejar la x o la y en función de la otra variable. Despejemos, por ejemplo, la y. Tendremos

$$-4y^2+(-4x+16)y+(3x^2+16x-12)=0$$

Entonces, resolviendo la ecuación de segundo grado de arriba con incógnita y, queda

$$y=\frac{(4x-16)\pm\sqrt{(-4x+16)^2+16(3x^2+16x-12)}}{-8}=\frac{(4x-16)\pm 8(x+1)}{-8}$$

Por tanto, las rectas son

$$-8y=4x-16+8(x+1) \qquad \text{y} \qquad -8y=4x-16-8(x+1),$$

esto es,

$$3x+2y-2=0 \qquad \text{y} \qquad -x+2y-6=0$$

De manera que la ecuación del enunciado

$$3x^2-4xy-4y^2+16x+16y-12=0$$

se puede factorizar como

$$(3x+2y-2)(-x+2y-6)=0,$$

quedando así claro que es la unión de dos rectas que se cortan.

5. Dada la cónica de ecuación $4x^2-4xy+y^2-8x-8y+4=0$, clasificarla y determinar su vértice y su eje.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -4 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_0=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

con $|A|=-144$ y $|A_0|=0<0$. Parábola.

Hallemos la ecuación reducida. Los autovalores de A_0 son $a_{11}^{**}=0$ y $a_{22}^{**}=5$. Además, $a_{01}^{**}=\pm\sqrt{\frac{-|A|}{tr(A_0)}}=\pm\sqrt{\frac{144}{5}}$. Para a_{01}^{**} se escoge el signo opuesto de a_{22}^{**}, de modo que $a_{01}^{**}=-\sqrt{\frac{144}{5}}$. La ecuación reducida se obtiene de la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & x^{**} & y^{**} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{144}{5}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{144}{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix}=0$$

dando lugar a

$$y^{**2}=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{144}{5}}x^{**}$$

Los subespacios propios son

$$V_0=L\{(1,2)\} \qquad \text{y} \qquad V_5=L\{(-2,1)\}$$

El cálculo del vértice da lugar al punto:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23/50 \\ 3/25 \end{pmatrix}$$

El eje de la parábola es la recta:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23/50 \\ 3/25 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. Determinar la parábola $\mathcal{C}$ cuyo eje es paralelo a OX y que pasa por los puntos $A = (0,0)$, $B = (-3,2)$ y $C = (5,-2)$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Se tiene $|A| \neq 0$ y $|A_0| = 0$. Dado que $(0,0) \in \mathcal{C}$ se resuelve que $a_{00} = 0$. Por otro lado, dado que el eje de la parábola es paralelo a OX, el autovector asociado al autovalor 0 de A_0 es $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Esto implica que

$$A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta igualdad se deduce que $a_{11} = a_{21} = 0$.

Tenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & 0 & 0 \\ a_{20} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Como $|A| \neq 0$, resulta que $a_{22} \neq 0$, quedando la ecuación

$$a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y = 0$$

Si se divide entre a_{22}, obtenemos la ecuación $y^2 + ax + by = 0$. Como $(-3,2) \in \mathcal{C}$ y $(5,-2) \in \mathcal{C}$,

$$\begin{cases} 4 - 3a + 2b &= 0 \\ 4 + 5a - 2b &= 0 \end{cases}$$

Se tiene $a = -4$ y $b = -8$, de modo que la ecuación de la parábola es $y^2 - 4x - 8y = 0$.

7. Referir la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 4$ a los ejes dados por $x^2 = 4y^2$.

$$x^2 = 4y^2 \Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)(x + 2y) = 0$$

Los dos ejes son las rectas $x - 2y = 0$, $x + 2y = 0$. Si $B_c = \{(1,0),(0,1)\}$ es la base canónica y $B' = \{(2,1),(-1,2)\}$ es una base que engendra los dos ejes dados en el enunciado, la relación entre las coordenadas (x, y) de un punto respecto de la primera base y las coordenadas (x', y') del mismo punto respecto de la segunda base es la dada por la matriz de cambio de base

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

De manera que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x' + 2y' \\ x' - y' \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación de la hipérbola, queda

$$(2x' + 2y')^2 - 4(x' - y')^2 = 4 \qquad \text{ó} \qquad 4x'y' = 1$$

8. Dada la cónica de ecuación $x^2 - 6xy + 9y^2 + 8x - 4y + 11 = 0$, clasificarla y determinar su vértice, su eje y la tangente en el vértice.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 9 \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

con $|A| = -100$ y $|A_0| = 0$. Parábola.

Hallemos la ecuación reducida. Los autovalores de A_0 son $a_{11}^{**} = 0$ y $a_{22}^{**} = 10$. Además, $a_{01}^{**} = \pm\sqrt{\frac{-|A|}{tr(A_0)}} = \pm\sqrt{10}$. Para a_{01}^{**} se escoge el signo opuesto de a_{22}^{**}, de modo que $a_{01}^{**} = -\sqrt{10}$. La ecuación reducida se obtiene de la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & x^{**} & y^{**} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{10} & 0 \\ -\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = 0$$

dando lugar a

$$y^{**2} = \frac{\sqrt{10}}{5} x^{**}$$

Los subespacios propios son

$$V_0 = L\{(3,1)\} \qquad \text{y} \qquad V_{10} = L\{(-1,3)\}$$

El cálculo del vértice da lugar al punto:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$$

El eje de la parábola es la recta:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La recta tangente a la parábola en el vértice es la que pasa por el vértice y es perpendicular al eje:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

9. Dada la cónica de ecuación $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 13x - 19y + 9 = 0$, clasificarla y determinar sus asíntotas.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -13/2 & -19/2 \\ -13/2 & 3 & 5/2 \\ -19/2 & 5/2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & -2 \end{pmatrix}$$

con $|A| = -\frac{49}{4}$, $|A_0| = \frac{49}{4}$. Hipérbola.

Se tiene $a_{00}^{**} = \frac{|A|}{|A_0|} = \frac{1}{2}$.

El centro es el punto

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Las asíntotas son las rectas que pasan por el centro y tienen pendiente m dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

Resulta $m = 3$ ó $m = -1/2$. Las ecuaciones de las asíntotas son

$$y + 1 = 3(x - 3) \qquad \text{y} \qquad y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$