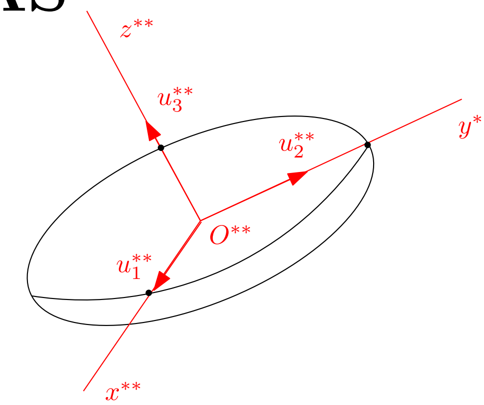
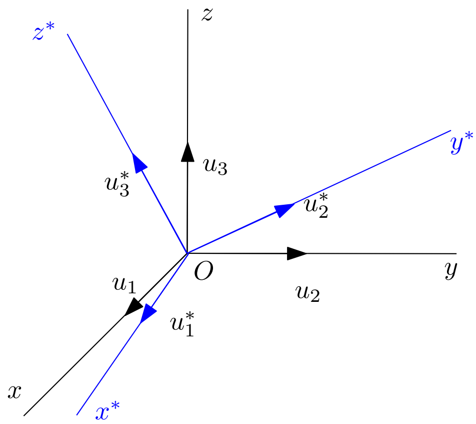
CUÁDRICAS



Ecuación reducida de una cuádrica.



$$\mathcal{R} = \{O, u_1, u_2, u_3\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \bar{a} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{pmatrix} \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{00} & \bar{a}^t \\ \bar{a} & A_0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(1 \quad x \quad y \quad z) \quad A \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0} \qquad \boxed{X^t A X = 0}$$

TRANSFORMACIÓN ORTOGONAL DIRECTA

$$\mathcal{R}^* = \{O, u_1^*, u_2^*, u_3^*\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$$

ϕ transformación ortogonal directa que representa la matriz de cambio de base

Se tiene $\quad X = GX^* \quad$ con $\quad X^* = \begin{pmatrix} 1 \\ x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} \quad$ y $\quad G = \begin{pmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \bar{0} & \phi \end{pmatrix}$

Por tanto $\quad X^t A X = (GX^*)^t A (GX^*) = X^{*t}(G^t A G) X^*$

$X^t A X = 0 \quad$ si y sólo si $\quad X^{*t} A^* X^* = 0 \quad$ donde $\quad A^* = G^t A G$

$$\boxed{A^* = G^t A G = \begin{pmatrix} a_{00} & \bar{a}^t \phi \\ \phi^t \bar{a} & \phi^t A_0 \phi \end{pmatrix}}$$

Se elige ϕ de modo que $\quad A_0^* = \phi^t A_0 \phi = \phi^{-1} A_0 \phi = D = \begin{pmatrix} a_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^* \end{pmatrix}$

La ecuación de la cuádrica respecto de $\mathcal{R}^*$ es $\quad \boxed{(1 \quad x^* \quad y^* \quad z^*) \quad A^* \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = 0} \quad$ o $\quad \boxed{X^{*t} A^* X^* = 0}$

Resulta más sencilla que la ecuación inicial, dado que A^* es más simple que A.

TRASLACIÓN

$$\mathcal{R}^{**} = \{O^{**}, u_1^{**}, u_2^{**}, u_3^{**}\}$$

$\bar{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$ coordenadas del centro de la cuádrica respecto de $\mathcal{R}$

$\bar{t}^* = \begin{pmatrix} t_1^* \\ t_2^* \\ t_3^* \end{pmatrix}$ coordenadas del centro de la cuádrica respecto de $\mathcal{R}^*$

Entonces $\phi\bar{t}^* = \bar{t}$ y $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \\ z^{**} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1^* \\ t_2^* \\ t_3^* \end{pmatrix}$

Si $X^{**} = \begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \\ z^{**} \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} 1 & \bar{0} \\ \bar{t}^* & Id \end{pmatrix}$ entonces $X^* = TX^{**}$

$$X^{*t}A^*X^* = (TX^{**})^t A^*(TX^{**}) = X^{**t}(T^tA^*T)X^{**}$$

$X^{*t}A^*X^* = 0$ si y sólo si $X^{**t}A^{**}X^{**} = 0$ donde $A^{**} = T^tA^*T = T^t(G^tAG)T$

$$\boxed{A^{**} = T^t(G^tAG)T = \begin{pmatrix} a_{00} + 2\bar{a}^t\bar{t} + \bar{t}^tA_0\bar{t} & (\bar{a} + A_0\bar{t})^t\phi \\ \phi^t(\bar{a} + A_0\bar{t}) & \phi^tA_0\phi \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{La ecuación del centro de la cuádrica, en caso de haberlo, es } \bar{a} + A_0\bar{t} = \bar{0}.}$

La ecuación de la cuádrica respecto de $\mathcal{R}^{**}$ es

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & x^{**} & y^{**} & z^{**} \end{pmatrix} A^{**} \begin{pmatrix} 1 \\ x^{**} \\ y^{**} \\ z^{**} \end{pmatrix} = 0} \quad \text{ó} \quad \boxed{X^{**t}A^{**}X^{**} = 0}$$

Resulta más sencilla que la ecuación la inicial, dado que, si la cónica tiene centro, A^{**} es diagonal.

Invariantes métricos de las cuádricas.

$|A| = |A^*| = |A^{**}|$
$|A_0| = |A_0^*| = |A_0^{**}|$
$tr(A_0) = tr(A_0^*) = tr(A_0^{**})$
$J(A_0) = J(A_0^*) = J(A_0^{**})$ con $J(A_0) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$, siendo α_{ii} el adjunto de a_{ii} en A_0.

Matrices reducidas

Existen tres situaciones posibles para la matriz A^{**} en función de que exista uno, ninguno o infinitos centros ($\bar{a} + A_0\bar{t} = \bar{0}$ compatible determinado, incompatible o compatible indeterminado):

i) **Cuádrica con centro único.** Entonces $|A_0| = |A_0^*| \neq 0$ o, en otras palabras, los autovalores de A_0 son no nulos. La *matriz reducida* es

$$A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{33}^{**} \end{pmatrix}$$

con

$$\boxed{a_{00}^{**} = \frac{|A|}{|A_0|}}$$

y

$\boxed{a_{11}^{**},\ a_{22}^{**} \text{ y } a_{33}^{**} \text{ las raíces de } p(\lambda), \text{ el polinomio característico de } A_0}$

Los casos posibles son: elipsoide real, elipsoide imaginario (conjunto vacío), hiperboloide hiperbólico, hiperboloide elíptico, cono imaginario (un punto) y cono real.

ii) **Cuádrica sin centro.** Pueden darse dos situaciones:

ii.a) Exactamente uno de los autovalores de A_0 es nulo, por ejemplo, $a_{33}^{**} = 0$, y $|A| \neq 0$ ($r(A_0) = 2$ y $r(A) = 4$). Es el caso de los paraboloides. La matriz reducida resultante es

$$A^{**} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{03}^{**} \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} & 0 \\ a_{30}^{**} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con

$\boxed{a_{11}^{**} \text{ y } a_{22}^{**} \text{ los autovalores no nulos de } A_0}$

y

$$\boxed{a_{30}^{**} = \pm\sqrt{\frac{-|A|}{J(A_0)}}}$$

ii.b) Exactamente dos autovalores son nulos ($r(A_0) = 1$) y $r(A) = 3$. Es el caso de los cilindros parabólicos. La matriz reducida resultante es

$$A^{**} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{02}^{**} & 0 \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 & 0 \\ a_{20}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con

$\boxed{a_{11}^{**} \text{ el autovalor no nulo de } A_0}$

y

$$\boxed{a_{02}^{**} = \pm\sqrt{\frac{-\tilde{K}(A)}{tr(A_0)}}}$$

siendo $\tilde{K}(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ donde A_{ii} es el adjunto de a_{ii} en A.

iii) **Cuádricas con infinitos centros.** Se tienen tres casos posibles:

iii.a) Hay exactamente un autovalor nulo (por ejemplo, $a_{33}^{**} = 0$) y $|A| = 0$. Entonces

$$A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{a_{11}^{**} \text{ y } a_{22}^{**} \text{ los autovalores no nulos de } A_0 \text{ y } a_{00}^{**} = \frac{\tilde{K}(A)}{J(A_0)}}$$

En este caso se obtienen cilindros elípticos (reales o imaginarios) o hiperbólicos, o un par de planos (reales o imaginarios) que se cortan en una recta real.

iii.b) Hay exactamente dos autovalores nulos ($r(A_0) = 1$), por ejemplo, $a_{22}^{**} = a_{33}^{**} = 0$, y $r(A) < 3$. Entonces se tiene

$$A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dando lugar a dos planos paralelos (reales o imaginarios) o coincidentes. En este caso

$$\boxed{a_{11}^{**} \text{ el autovalor no nulo de } A_0 \text{ y } a_{00}^{**} = \frac{\tilde{J}(A)}{tr(A_0)}}$$

siendo

$$\tilde{J}(A) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{02} \\ a_{20} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{03} \\ a_{30} & a_{33} \end{vmatrix}$$

iii.c) Los tres autovalores son nulos. En ese caso tenemos

$$A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & a_{01}^{**} & a_{02}^{**} & a_{03}^{**} \\ a_{10}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ a_{20}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ a_{30}^{**} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Este es el caso de un plano y la ecuación ya viene en forma reducida.

Clasificación de las cuádricas en función de los invariantes

Llamamos **signatura** de A al par $s(A) = (p, q)$ siendo p el número de autovalores positivos y q el número de autovalores negativos. Se tiene $s(A) = s(A^*) = s(A^{**})$ y $s(A_0) = s(A_0^*) = s(A_0^{**})$.

Caso 1. $|A| \neq 0$.

1.1. Si $|A_0| \neq 0$ (cuádrica con centro único), puede ocurrir:

- 1.1.a) $s(A_0) = (3, 0)$ y $|A| > 0$. Elipsoide imaginario.
- 1.1.b) $s(A_0) = (3, 0)$ y $|A| < 0$. Elipsoide real.
- 1.1.c) $s(A_0) = (2, 1)$ y $|A| > 0$. Hiperboloide hiperbólico.
- 1.1.d) $s(A_0) = (2, 1)$ y $|A| < 0$. Hiperboloide elíptico.

1.2. Si $|A_0| = 0$ (paraboloides), puede ocurrir:

- 1.2.a) $|A| < 0$. Paraboloide elíptico.
- 1.2.b) $|A| > 0$. Paraboloide hiperbólico.

Caso 2. $|A| = 0$.

2.1 Si $|A_0| \neq 0$ (conos), puede ocurrir:

- 2.1.a) $s(A_0) = (3, 0)$. Cono imaginario.
- 2.1.b) $s(A_0) = (2, 1)$. Cono real.

2.2 Si $|A_0| = 0$ (cilindros y planos), puede ocurrir:

2.2.1 Si $J(A_0) \neq 0$ (cilindros no parabólicos y planos secantes) puede ocurrir:

- 2.2.1.a) $J(A_0) > 0$ y $\tilde{K}(A) \neq 0$ con $sig(\tilde{K}(A)) = sig(tr(A_0))$. Cilindro elíptico imaginario.
- 2.2.1.b) $J(A_0) > 0$ y $\tilde{K}(A) \neq 0$ con $sig(\tilde{K}(A)) \neq sig(tr(A_0))$. Cilindro elíptico real.
- 2.2.1.c) $J(A_0) > 0$ y $\tilde{K}(A) = 0$. Dos planos imaginarios secantes.
- 2.2.1.d) $J(A_0) < 0$ y $\tilde{K}(A) \neq 0$. Cilindro hiperbólico.
- 2.2.1.e) $J(A_0) < 0$ y $\tilde{K}(A) = 0$. Dos planos reales secantes.

2.2.2 Si $J(A_0) = 0$ (cilindros parabólicos y planos paralelos) puede ocurrir:

- 2.2.2.a) $tr(A_0) \neq 0$ con $\tilde{K}(A) \neq 0$. Cilindro parabólico.
- 2.2.2.b) $tr(A_0) \neq 0$ con $\tilde{K}(A) = 0$ y $\tilde{J}(A) > 0$. Dos planos imaginarios paralelos.
- 2.2.2.c) $tr(A_0) \neq 0$ con $\tilde{K}(A) = 0$ y $\tilde{J}(A) < 0$. Dos planos reales paralelos.
- 2.2.2.d) $tr(A_0) \neq 0$ con $\tilde{K}(A) = 0$ y $\tilde{J}(A) = 0$. Dos planos coincidentes.
- 2.2.2.e) $tr(A_0) = 0$. Un plano único.